IOAN. THOMÆ FREIGII

QVAESTIONES GEOMETRICÆ ET STEREOMETRICAE

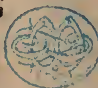
in Euclidis & [redacted] στοιχειώ-σιν: in quibus

Logica veterum Mathematicorum illustratur & demonstratur.

Πᾶς ἀγεωμέτρητος ἀοίτω.







Cum Gratia & Priuilegio Cæs. Maiestat.

BASILEAE,
PER SEBASTIANVM HENRICPETRI.

PLVTARCHVS:

Θεὸς ἀεὶ πάντων μάλιστα γεω-
μετρεῖ.

ERVDITIS VIRIS ET IN INGENIOSA MATHESI PRAESTANTIBVS, DOM. CHRISTIANO Vrstisio compatri charissimo: Friderico Resnero, Io. Stadio, Conrado Dasypodio, Dauidi Vvolckensteinio, Lazaro Schönero, dominis & amicis suis honorandis:

IOAN. THOMAS FREIGIVS S.



VM pestilentia Delum vastaret (vt Philoponus 7 cap. 1. Post. scribit) consultusq; Apollo cubicam altaris sui figurā duplicari iussisset, Deliiq; cubum cubo superimponentes, non cubum, sed prisma oblongum, diuersi generis figuram, imprudentes fecissent, nec propterea pestilentia cessaret, Deum denuò sciscitati, responsum tulerūt, oraculo satisfactum nō esse. Ad Platonem igitur tanquam Mathematicorum principem, Deliacum problema delatū est. Is audito Apollinis oraculo, respondit Græcos neglectæ Geometriæ nomine à Deo accusari. Est enim in solidis (vt nostis) summū problema de duplicando cubo: vt in planis de

quadrando circulo. Itaq; è vestigio volare Platonis literæ ad omnes familiares in Italiam, in Aegyptum, in Græciam uniuersam, omnesq; præstantes Geometras excitare ad hoc problema demonstrandũ. Verumenimverò etsi ego nec Plato sum, nec ex eorum numero qui circuli quadraturam aut cubi duplicationem sibi vendicãt: pestis tamen quæ hoc anno nos hîc infestauit, sæuitia admonitus, analyses meas in Geometriam logicas recolere & si quid mihi humanitus contingeret, à fato liberare constitui. Nam cũ Aristotelis ἀπόδειξιν, Geometricarũ ferè demonstrationum causa institutam cogitarẽ, à paucis autẽ ἀποδείξεως illius præcepta ad verũ & legitimum exemplorum vsum traducta cernerem; tentare volui an aliquid in eo genere ad Geometriam illustrandam ac faciliorem reddendã afferre Mathematum studiosis possem. Atq; hæc præcipua huius laboris mihi causa fuit. Altera fuit in eo, vt huius artis recognitione animum meum à priuatarum & publicarũ calamitatum cogitatione auerterẽ. Et certè cũ hoc doctrinæ genus secundũ Platonẽ sit μεταστρεπτικὸν νοήσεως, διανοίας, θέας, id est,

id est, conuertat intelligentiam, ratiocinationem, contemplationem: eius tractatio et recognitio non parũ remedij nostris doloribus attulit, quos ex liberorum charißimorum obitu percepimus. Sed de hac Mathesi, alia apodixis nobis erit. In hac verò Geometrica mathesi quid præstiterim, vos Germaniæ cãdidißimas animas in primis æstimare cupio. Ego sanè magis Logicã & apodicticã Aristotelis in Euclide: quã vsum ipsum in erudito illo puluere me secutũ liberè profiteor: unumq; illud propositum habui, vt νοερώτερα καὶ ἀϋλώτερα pleraq; à me instituerentur. Alicubi mihi placui (vt simpliciter meum affectũ vobis aperiam) alicubi mihi nondũ satisfacere potui: quod ipsi pro vestro in Mathematis vsu & eruditione facilè animaduertetis. Vt igitur ἀπόδειξις nostra Logica integra euadat & vbi à norma iudicij dianoëtici aberrauit: in viam reducatur.: vos candidißimos & Logicos (nam ἀλόγους non moror) iudices, per Mathematicas Musas, per Thaletis bouem, per Pythagoræ hecatomben, per Archimedis εὕρηκα, oro rogoq; vt cũ à grauioribus negotijs respirare vobis contigerit, huc oculos

vestros eruditos conuertatis & ut Aristarchi quæ iugulanda sunt obelisco configatis aut ad minus miniatula cera notetis, ut in posterũ hæc in eruditæ iuuentutis utilitatem perfectiora ac synceriora appareant. Nam ut ante a professus sum, non dubito, imò certò scio multa adhuc multis in locis desiderari posse, neq; tamen despero veniã me à cæteris, à vobis quidem certè sine dubio consecuturũ: præsertim cũ eodem propemodum tempore in Cicerone, in Paratitlis, in Mosaico & alijs, hoc est, in pistrino laborandum fuerit: ut de peste taceam, quæ mihi sæpè & domi in familia & foris in typographia moram iniecit. Diagrammata autẽ seu σχήματα Geometrica omisimus, quòd illa ex Rami Geometria peti, eandemque cum his nostris Quæstionibus coniungi cupiamus. Sed de anathemate nostrarum Quæstionum satis. Vos feliciter in Christo valete. Dat. Basileæ. Cal. Martij, anno Epochæ Christianæ XXCIII.

PRO-

PROOEMIVM MATHEMATICVM.

Quot sunt partes Prooemij Mathematici?



Res: de causa efficiente, finali & formali mathematum. Prima enim pars continet historiam præstantium mathematicorum, à quibus artes mathematicæ inuentæ & excultæ sunt. Secunda mathematum utilitates declarat. Tertia disserit de compendiaria uia matheseos instituendæ..

I. DE MATHEMATICIS AVtoribus.

Quot fuerunt periodi disciplinarum?

Plinius 4 ponit lib. 18. cap. 15. Chaldæam, Aegyptiam, Græcam, Romanam.

Qualis fuit prima periodus?

Mathesis prima hominum scientia ante diluuium fuit (ut ex Iosepho patet) artibus mathematicis per primos patriarchas diuino longissimæ & sanctissimæ vitæ beneficio repertis. In hac excelluerunt Sethus & Abrahamus: de quibus Iosephus lib. 1. c. 3. & 8. item Chaldæi, quibus Semiramis templũ in Babylonis medio erexit, ut scribit Diodor. Sic. lib. 2. excelluit & Berosus, de quo Plin.

Quænam fuit secunda?

Ortæ apud Chaldæos mathematicæ artes tandem ex Assyria in Aegyptum commigrarũt duce Abrahamo, ut scribit idem Iosephus lib. 1. cap. 9. Proclus istã autem periodũ temporum secundã secutus, inuentionẽ arithmeticæ ad Phœnicas propter mercaturas & cõmercia, geometriæ ad Aegyptios propter inundationes Nili suo limo terminos agrorum obruentis retulit. ὥσπερ παρὰ τοῖς Φοίνιξι διὰ τὰς ἐμπορείας καὶ τὰ συναλλάγματα, τὴν ἀρχὴν ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις: οὕτω δὴ καὶ παρ' αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία, διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν εὑρέθη.

Quæ nam fuit tertia & quarta?

Deinceps mathesis ex Aegypto Græcum mare traiecit & ad Grecię philosophos tandem peruenit, annisq; paulò plus ducētis à Thalete Milesio & Pythagora Samio ad Euclidem maturitatem suam quandam & perfectionem habuit: nos ætatem istam maturitatis longius ad Theonem usq; produximus annis fermè mille. Thales enim ante Christum floruit annis 584. Theon post Christum annis 390, quibus additis, summa est 974. Sed in hac secta etiam Latinam complectimur, quam Proclus nouam sectam non putauit propter Cæsarianam Astrologiæ descriptionem, quæ præsertim Sosigenis fuit,

1. Thales Milesius

Geometriā ex Aegypto in Græciā transtulit multaq; ipse reperit, multa successoribus suis exposuit. τοῖς μὲν καθολικώτερον, τοῖς δ' αἰσθητικώτερον ἐπιβάλλων, ait Laërtius. Quandam de triangulis doctrinam attigit, ut 5. 15. 26. p. 1. ut Proclus recitat: item etiā adscriptionem trianguli & circuli, de qua sunt 2. 3. 4. 5. p. 4. cuius adscriptionis etiā lætitia elatus, bouem immolasse dicitur. Pyramides Aegyptias dimensus est, obseruato cū corporibus umbræ essent æquales, quod accidit sole 45 grad. eleuato. Sed geodæsia illa ex umbris facta est postea elegantior de quolibet tempore per triangula similia.

Circa Astrologiam obseruauit quædā præcipuæ necessitatis ac difficultatis de æquinoctijs, solstitijs, ursa minore. i. Cynosura. Primus eclipsim Solis pdixit & lunæ eclipsim Cyro pdixit.

2. Ameristus Mamertinus, Stesichori poëtę frater.

8. Pythagoras familiã Mathematicorũ ingentẽ extulit. Ab eo in Mathematis

- Inuenta uaria sunt. Nam
  - Maximè περὶ ἀριθμητικὸν εἶδος elaborauit.
  - Geometriam ad summum perduxit, res Mathematicas ἀΰλως καὶ νοερῶς consideravit. Vnde Pythagorea ἀφαίρεσις. Inuenit 32. 44. 47. 48. p. 1. Sed in primis ob inuentã 47. & 48. p. 1. celebratur, cuius inuẽtionis lætitia elatus Musis bouem immolauit: alij hecatombẽ dicunt. Inuenit etiam τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν, quæ decimi & posteriorũ Euclidis elementorum Geometria præcipua est.
  - Astrologiã impensè & docuit & exercuit.
  - Musicã in Astris deprehendit: mentes à cogitationum intentione cantu & fidibus ad tranquillitatẽ traducere solitus est.
- Ludus apertus: in quo
  - Examẽ. Nõ quosuis in disciplinã admittebat, sed ἐφυσιογνωμόνει, ne ἄμουσοι, ἀθεώρητοι, ἀγεωμέτρητοι otio et ludo abuterentur.
  - Tria genera doctrinæ:
    - Παιδευτικόν
      - Ἀκουστικόν: ἀκουστικοὶ tẽpore silẽtij dicebãt.
      - Μαθηματικόν in cognitiõe mathematũ.
    - Φυσικόν: in studijs physicis.
    - Πολιτικόν in morib. et administratione ciuitatũ & Rerũp.

4. Anaxagoras Clazomenius.

5. Oenopides Chius. Proclus inuentionem 12 & 23.p,1.ei attribuit.

6. Zenodotus Oenopidis discipulus.

7. Hippocrates Chius ex mercatore Mathematicus. Duas res in Geometria maximas tentauit, valdeque promouit, Τετραγωνισμὸν quadraturam circuli & duplicationem cubi. Ex lunula quadrata circulum quadratum esse arbitrabatur. Duplicationem cubi tentauit per duas in dupla ratione rectas duarum continuè proportionalium extremas. Quinetiam in dubijs diagrammatis ἀπαγωγὴν deductionem ad impossibile fecit. Vt igitur Thales καθολικώτερα, Pythagoras νοερώτερα omnia fecit: ita Hippocrates ἀπαγωγικὰ pleraque fecit. Primus στοιχειώτης à Proclo dicitur.

8. Briso. Communibus principijs quadraturam circuli demonstrare conabatur.

9. Antipho. Quadraturam etiam demonstrare conatus est.

10. Democritus.

11. Theodorus Cyreneus, Platonis in Mathematicis magister.

12. Plato Mathematicorū Deus. Eius

- Praeceptores in
  - Graecia Theodorus Cyrenaeus.
  - Italia Pythagoraei.
  - Aegypto sacerdotes Aegyptij.
- Mathematicū studium ubi cōsid.
  - Inuenta quoad
    - Nomē. Primꝰ nominauit
      - Στοιχεῖον elementum in Mathematicis, unde στοιχειώσεις & στοιχειωτής.
      - Ἑτερομήκη oblongū numerum.
    - Res. Nam primꝰ
      - Inchoauit sectiones conicas & cylindricas.
      - Inuenit modum demonstrationis per analysin.
  - Vsus Matheseos. Nam Philosophiae suae libros Mathematicis rationibus distinxit ac frequentauit.
  - Examen discipulorū. Nam in Academiā nemnē admittebat, nisi Geometriae peritum aut capacem: unde illud uestibulo Academiae inscriptum: ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω.
  - Excitatio studiorum Mathematicorum. Nam Deliaco duplicandi cubi problemate proposito, mundum uniuersum mathematicae studio incendit & inflammauit. Extat apud Eutocium mesographus eius ad duas medias proturus inueniendum.

13. Leodamas Thasius.

14. *Architas Tarentinus: in quo Mathematica*
- *Scientia. Scripsit cubi duplicationem per semicylindrum: cuius demonstrationem Eutocius integram habet.*
- *Vtilitas in*
  - *Mechanica. Primus enim motũ organicum in figuram geometricam adhibuit: unde lignea columba uolatilis ab eo facta.*
  - *Rebus bellicis. Fuit enim dux.*
  - *Mensura arenæ.*

15. Theætetus Atheniensis: Primus inscripsit illa quinque solida, quæ primus Pythagoras inuenit.

16. Neoclides.

17 Leo, Neoclidis discipulus. Modum inuenit quo dijudicaretur possibile problema esset an impossibile: Mathematicæ uniuersæ elementa conscripsit, ut ad usum faciliora & expeditiora essent.

18. *Eudoxus Gnidius habuit*
- *Scientiam in*
  - *Arithmetica: totum in elementis quintum librum de analogijs inuenit.*
  - *Geometria, doctrinam sectionũ à Platone inchoatarum auxit, perq; has lineas curuas, duplicationem cubi aggressus est.*
  - *Astrologia, hypotheses ἀνελιττουσῶν reuoluentium sphærarum inuenit. Disseruit cõtra Chaldæorum prædictiones de natali die. Extant hodie eius φαινόμενα cum commentarijs Hipparchi.*
- *Vsum in Mechanica & Organica.*

19. Amyclas Heracleótes Platonis familiaris.

20. & 21. Dinoſtratus & Menechmus fratres. Menechmus reperit conicas ſectiones, quibus duas medias inuẽnit.

22. Theudius.

23. Helicon Cyzicenus Athenienſis. Minori Dionyſio ſolis eclipſim prædixit & argenti talento donatus eſt. Aſtronomicæ Ephemerides tum nullæ fuerant.

24. Hermotimus Colophonius.

25. Philippus Mendæus. Comperit materiam iridis in profundo irradiari & obſeruauit opticum illud iridis admirabile, quòd inſequentes fugiat, fugientes inſequatur.

26. Xenocrates. Magiſtri Platonis illud arctè tenuit, ὀυδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Nam cum quidam mathematum imperitus auditor eius eſſe uellet: Abi, inquit, λαβὰς γὰρ οὐκ ἔχεις φιλοσοφίας.

27. Theophraſtus.

28. Eudemus.

29. Ariſtæus.

30. Ariſtarchus.

31. Euclides ſub Ptolemæo primo floruit, atque etiã ei notus fuit in Aegypto: cui interroganti, num qua ad Geometriam uia magis compendiaria eſſet, quám ςοιχειώσεως ab eo cõpoſitæ, reſpondit, ſemita, ô rex, ad geometriam regia nulla eſt. Euclides ςοιχειώτης hactenus efficitur à Proclo, ut ſit elementorum non inuentor, ſed demonſtrator & compoſitor tantúm.

32. Eratoſthenes, ob excellentiam doctrinæ, minor Plato vocatus eſt, eoq; nomine regię bibliothecæ in Aegypto præfectus. Ex eius ſcriptis extant, cribum Arithmeticum, epiſtola & epigramma cum meſolabio duplicandi cubi..

33. Archimedes. Arithmeticam & Geometriam

ſtudio-

ſtudioſè conſcripſit. In Geometricis labor illi gratiſſimus fuit de ratione ſphæræ & cylindri: ideoque amicos orauit ut ſepulchro ſuo imponerent cylindrum ſphæra compræhenſum, præſcripta ratione compræhendentis ad compræhenſum: quæ ratio demonſtratur ad 33.p.1. de ſphæra & cylindro. Vide Ciceronem libro 5. Tuſcul. quæſt. Cùm coram Hierone R. Siciliæ de præſtantia Geometriæ diſſereret, fiduciaque artis iactaret paradoxum illud, de quo Plutarchus in Marcello & Syneſius in epiſtolis & Pappus in Mechanicis & Tzetzes: Datis viribus datum pondus tollere: ac ſi mundus alteram terram haberet, ut Democriti decreto ferebatur, hanc illuc poſſet adducere: vel, vt apud Pappum eſt δός μοι, φησὶ, ποῦ στῶ, καὶ κινῶ τὴν γῆν: Da mihi (inquit) vbi conſiſtam & mouebo terram: cùm, inquam, iactaret id Archimedes, rex geometram admiratus, rogauit vt tantæ confidentiæ periculum faceret. Quapropter Archimedes emptam è nauibus regijs unam & in ſiccum littus eductam grauiuſque oneratam, ſolus machinis ſuis ad ſe perinde pertraxit, ac ſi in mari velis remiſque moueretur. Quibus ingenij miraculis rex permotus dixit, Archimedi quidlibet affirmanti credendum eſſe, tanquam tali artifici nihil poſſet eſſe difficile. Eius machinis poſtea Syracuſæ aduerſus Marcellum ita defenſe ſunt vt in illa oppugnatione Briareus & Centimanus diceretur à Romanis. Oppugnatio vrbis propugnatio à Polybio, Plutarcho & Liuio: Scripſit & περὶ ὀχουμένων. i. de his, quæ vehuntur aqua: & σύζυγα coniugata: & mechanicam de Barulco, Pneumatico & Hydrauſcopico & κατόπτρων τὰς ἐξάψεις ſpeculorum incenſiones ſeu de ſpeculis comburentibus. Diſputauit de numero arenæ, Lunæ, Solis & quinque errantium motus in ſphæram alligauit. Iſorropica ſcripſit: & furtum permiſti cum auro argenti in corona re-

na regis deprahendit : nudusque per plateas currens, identidem clamauit, εὕρηκα εὕρηκα. Vide Vitruuium libro 9. capite 5. Intentus formis occisus est ab ignaro milite quis esset, ægreque id Marcellus tulit.

34. Hipparchus: nouam stellam suo æuo deprehendit. Supersunt eius commentarij in Arati & Eudoxi phœnomena.

35. Apollonius Pergæus. Decimusquartus & decimusquintus liber elementorum Euclidis, Apollonij huius sunt, per Hypsiclem contracti.

36. Aeneas Hieropolita.

37. Amphinomus.

38. Ctesibius Alexandrinus tonsor, inter θαυματοποιητικοὺς mirandarum rerum artifices præcipuus. Vide Vitruuium libro 9. capite 9. & libro 10. cap. 12.

39. Hero mechanicus: Scripsit de machinis bellicis.

40. Geminus. Demonstrauit omnium linearum tres tantùm species similares esse, rectam, circularem, cylindraceam.

41. Perseus tres illas species, parabolem, hyperbolem, ellipsim inuenit : de qua re versus hi sunt:

Τρεῖς γραμμὰς ἐπὶ πέντε τομαῖς τὰς ἐπιελικὰς εὑρὼν
περσεὺς. τῶν δ' ἕνεκα δαίμονας ἱλάσατο.

42. 43. 44. 45. 46. Philolaus, Plotinus, Porphyrius, Plutarchus, Posidonius : cuius sphæram commemorat Cicero libro secundo de Natura Deorum.

47. Menelaus Alexandrinus.

48. Sosigenes à Iulio Cæsare adhibitus ut annum a-

num ad Solis cursum corrigeret. Plinius libro 18. cap.25.

49. Ptolemæus.

50. 51. 52. 53. 54. Pappus, Philo, Diocles, Nicomedes, Sporus.

55. Theodosius.

56. Diophantus: scripsit Algebram.

57. Nicomachus.

58. Serenus.

59. Proclus.

60. Proclus mechanicus: de quo vide Zonaram.

61. Priscus. Vide Dionem in Seuero,

62. Diognetus Rhodius. Vitru.lib.10. cap.12.de illius Helepoli.

63. Theon. Mathematica elementa (quæ uulgò Euclidi tribuuntur) videntur Theoni tribuenda. Nec enim vllius propositionis inuentio inter Euclidis laudes à Proclo numeratur, sed demonstrationum accuratior explicatio.

Sunt'ne similes horum Mathematicorum virtutes?

Non sunt. Nam alijs debetur Mathematicæ institutionis compositio & conformatio: sic στοιχειωταὶ fuerunt Hippocrates, Leo, Theudius, Hermotimus, Euclides, Theon. Alijs nobilitas scholæ mathematicæ & autoritas tribuitur: vt Pythagoræ Platoni, Aristoteli. Alijs non solùm scholastica veritas & è libris demonstratio, sed popularis vsus & vtilitas proposita fuit: vt Architæ, Eudoxo, Eratostheni, Archimedi.

IL DE

II. DE MATHEMATVM vtilitate,

Quænam est Mathematum vtilitas?

Est in benè numerando & metiendo, non solùm quinque figuras mundanas (vt putat Proclus) sed omnes omnino cuiuscunque magnitudinis affectiones.

Quottuplex est illa vtilitas?

Duplex est, ad Contemplandum & ad Agendum.

Quomodo ad contemplandum?

Quia Mathematicum hoc totum ex Arithmeticis & Geometricis genus sensibus abductum, est ἑλκτικὸν, ἀγωγὸν, ἐγερτικὸν, μεταστρεπτικὸν νοήσεως, διανοίας, θέας, ἀληθείας: id est, eiusmodi vt alliciat, impellat, excitet, erigat, conuertat intelligentiam, ratiocinationē, contemplationem, veritatem, vt Plato ait. Ex omnibus enim artibus Mathesis vna præcipuè veri studiosa præcipueq; Logica fuit, neq; personarum autoritate, sed argumentorum necessitate iudicat, cogitq; animum in rebus ipsis attentum esse. Vt obiectos colores acutè videas, oculos corporis apertos & nitidos & conuersos esse necesse est: vt igitur intelligibilia compræhendas, mentem excitatam motuq; rationis erectam & conuersam esse necesse est: Mathesis autem excitat atq; erigit, vnaq; præ cæteris omnibus artibus hominis iudicium stabilit & confirmat: vt in Musicis, Opticis, Physicis, Astrologia, Medicina, Politicis, Ethicis, Iurisprudentia, Theologia.

Quomodo in Musicis?

Quia Musica in sonis & concentibus eorumquè interuallis & systematis, generibus & formis, in auditu Arithmetica est.

Quomodo in Opticis?

Quia Optica in visu nil nisi Geometria est in luce, vmbra, colore, visus ipsius natura & facultate, veri-

tate, hallucinatione, è situ, motu, numero, quantitate, figura: seu visus ipse rectus sit, seu speculorum reflexione, seu diuersorum densitate & raritate mediorum refractione. Vnde pictoribus non solùm lumen & vmbra, sed medius inter vtrumq; splendor, qui propterea tonus appellatur: & à transitu cõmissuraq; colorum ἁρμογή.

Quomodo in Physicis?

Quia Platonis & Aristotelis Physica sine Mathematis intelligi non potest. Nam in Platonis Timæo Deus mundi animã rationibus Arithmeticis & proportionibus composuit: deinde corpus Geometricis figuris architectatur. Aristotelis physica loquitur de tetragonismo, de duobus rectis in triangulo, de compositis gnomonibus, de diametro asymmetra, de triangulis & pyramide, de sphæra octo pyramidibus composita.

Quomodo in Astrologia?

Quia Astrologia nihil aliud est quàm Arithmetica numeratio motuum cœlestiũ, quàm Geometrica globorum cœlestium & stellarum, secundum longitudinis, latitudinis, altitudinis spatia figuratio & dimensio.

Quænam est causa infiniti laboris in cœlesti disciplina?

Impedimenta hypothesium grauissima.

Vnde hypotheses?

Cuiusuis disciplinæ principia sunt experientiæ & obseruationes primæ in generalia & vniuersalia documenta è Logicis artificibus collectæ & inductæ. Sic & Astrologiæ fundamentũ est in obseruationibus motuum cœlestium in generalia documẽta collectis. Sed Astrologi iaminde ab Aristotelis ætate primis obseruationibus & experimentis non contenti, causás illis principijs antiquiores exquisiuerunt, quæ cursus, recursus, stationes, tarditates, velocitates

citates efficeret. Hæc est hypothesium origo. Nam primò Eudoxus Gnidius reuoluētes orbes inuenit, postea Pythagorici concentricis orbibus abiectis, epicyclos & eccentricos induxerunt. Nostra ætate Copernicus hypotheses veterum reuocauit, & Astrologiam non ex astrorum, sed ex terræ motu demonstrauit. Ad has hypotheses accesserunt deinde Centuriæ tabularum.

Sed nónne hypotheses necessariæ sunt, cum sine his cœlestium motuum calculus haberi non possit?

Si Astrologia vetus Babyloniorum, Aegyptiorum, Græcorum etiam, ante Eudoxum sine hypothesibus fuit & ab ea cælestium corporum motus numerati ac eclipses prædictæ sunt: hypotheses nulla necessitate inuentæ aut retentæ sunt.

At illud constat è Proclo in Timæum Platonis & è Græcis Aristotelis interpretibus.

Non igitur necessariæ sunt hypotheses.

Quomodo igitur liberari Astrologia his impedimentis potest?

Per Logicam in primis, deinde per Arithmeticam & Geometriam diligenter exculta. Arithmetica numeret motus tanquam in perpetuo quodam Calendario: Geometria describat spatia stellarum: & cœlum diligenter inspiciatur.

Quomodo in Medicina?

Hippocrates Thessalo filio Arithmeticam & Geometriam non solùm ad splendorem vitæ, sed & ad medicinæ vsum proposuit. Arithmeticam quidem ad morborum intensiones, remissiones, periodos, mutationes, iudicia: Geometriam verò ad ossium situm, ordinem, luxationem, repositionem, contritorum refectionem, compositionem, exemptionem, affectionem deniq; omnem atq; curationem. Gale-

nus: Hippocrates (ait) & Geometriam & Aſtronomiam ſummo ad Medicinam adiumento cenſet eſſe: at ij inuehuntur in earum artium ſtudioſos: tantum abeſt ut ſibi capeſſendas & cognoſcendas arbitrentur.

Quomodo in Politicis & Ethicis?

Quia in Platonis & Ariſtotelis Philoſophia, bonarum actionum atq; adminiſtrationum partes ratione, proportione, ſymmetria definiuntur. Ariſtotelisq; de principe virtutũ Iuſtitia in Ethicis liber Mathematicus omnino eſt.

Quomodo in Iuriſprudentia?

Quia Romanæ leges ſexcentis locis ac partibus numerorum ſubtilitates & lineamentorum γραμμικὰς ἀποδείξεις requirunt. Vide Bartoli Tiberiadem & Buteonem de fluuiaticis inſulis & de diuidundo arboris fructu in confinio.

Quomodo in Theologia?

Quia in Chriſtiana Theologia Deus omnia creat in numero, menſura, pondere, id eſt, ad regulam Arithmeticam, Geometricam, Iſorropicam. Vide Buteonem de arca Noëi & Iobum, vbi commemorat oracula Geometrica de fabrica mundi terræq; baſibus & ſitu, de valuis & vectibus vinculisq; maris & terræ: oracula optica de loco lucis & tenebrarum: Oracula Aſtrologica de Pleiadibus, Orione, Arcturo, Boote: de cœli imperio in terras: Oracula Geographica: de terræ menſura & latitudine. Tota denique in Ezechiele ſanctæ ciuitatis Mathematica, abſque Mathematicis oculis perſpicuè cerni non poteſt.

Quomodo ad Agendum vtilis eſt Matheſis?

Quia Arithmetica vtilis eſt in negotijs ciuilibus & in bellis gerendis: Geometria, in Geodæſia, in Mechanicis, in Fodinis, in re militari & typographica, in nautica.

Quo-

Quomodo in negotijs ciuilibus Arithmetica vtilis est?

Quia prodeſt mercatoribus, trapezitis, aurificibus, quæſtoribus, oratoribus, iudicibus. Quid enim iudex ſine proportione modò Arithmetica numeri, modò Geometrica dignitatis efficiet? Hoc enim examine lanx utraque iuſticiæ in æquamento & libramento partium tanquam radiorum æqualium & æquitate iuris æquiponderantium conquieſcit. Quid in controuerſijs herciſcundæ familiæ, dirimendi lucri, damni, conſimiliumq; litium, vbi partes ſæpè toto diuiduo ſunt maiores? Quid inquam, in hiſce iudicijs iudex ſine aurea compoſitæ proportionis regula iudicet? Si exactam verborum ſcripturam potius quàm ſententiæ analogiam ſequatur, quam è ſummo quod putabit, iure ſummam iniuriam faciet?

Quomodo in rebus bellicis?

Ad inſtruendas & ordinandes acies, ait Plato in ζ. Polit. Enimuerò inſtruere aciem ſimplicem, duplicē, triplicem, quadruplicem huic hoſtiū uel illi numero opponere, Arithmetica militia eſt. Sic Aelianus numerum parem pariter parem militiæ gratia excogitatum eſſe dixit ad commodè mutandas acies. Sed ratio & proportio in bellicis rebus mirificas vires habet. Polybij libro nono 9 quæſtio eſt, Matheſin imperatori in primis eſſe neceſſariam. Scalas rex Philippus ad Meliteorum vrbem capiendam non ſatis longas attulit, turpi clade affectus diſceſſit. Itaque ſymmetria ſcalarum ab hiſtorico curioſius explicatur, vt ſint ad murum vt 12 ad 10: latitudo autem ad altitudinem dimidia. Finge: altitudo eſt 50 pedum ſcalæ erunt 60. Nam,

Vt 10 ad 12: ita murus ad ſcalas.

At 10 ad 12 ſunt in proportione ſeſquiquinta.

Ergò murus in eadem ad ſcalas. Nam,

Vt 10 ad 12: ita 50 ad 60.
At 10 ad 12 sunt $1\frac{1}{5}$.
Igitur & 50 ad 60 sunt ut $1\frac{1}{5}$.

Sed ratio ordinis in prælijs victoriam è proportione in primis machinatur, vt ex interuallis ordinum, aut subsidia mittantur, aut defessis receptus concedatur. Sic triplex Romana acies ad Geometricam interuallorum proportionem instructa, Gallicæ phalangi ad Arithmeticam proportionem instructæ præstabat, quia miles idem tertiò illic præliari poterat, qui hîc semel fractus nunquam recreari posset. Itaque Rom. exercitus idem partibus omnibus, eodémque reuocato vndique robore præliari poterat: prima acie quasi capite, vt cornibus tauri atque apri dentibus: media tanquam pectore, vt vultures: extrema velut vnguibus & calce, vt leones & equi. Deniq; si hastatus prima acie victus esset, receptus inter principes & triarios poterat acie secũda, tertiaq́; iterum atque iterum decertare. Quid vis amplius? Arithmetica pacis tempore negociatur, vendit, emit, aurum argentumq; appendit & fabricatur, rationes ærarij expendit &, dispensat, oratores & iudices instruit. At eadem etiam militat ac præliatur, & pacis belliq; temporibus adiumenta mirifica suppeditat. Atq; hæc de Arithmeticæ vtilitate.

Quænam est vtilitas Geometriæ?

Duplex est: Diuina & Humana.

Quænam est Diuina?

Plato ait Deum μάλιστα πάντων γεωμετρεῖν. Nam (vt Plutarch. interpretatur) cum Deus immensitatis æternæ spacia definire statueret, Geometria in primis vsus est, quæ longitudinum, latitudinum, profundorum spacia terminaret, omniumq́; symmetriam, rationem, proportionem, similitudinem discerneret,

quæ aërem leuitate in ſublime tolleret, aquam terramque pondere deprimeret: quæ denique cœleſtes globos ita tornaret, vt ad conuerſionis motum nihil rotundius effingi, nihil aptius expoliri poſſet.

Quæ nam eſt humana?

Eſt in geodæſia, in mechanicis, in fodinis, in re militari, in re typographica, in nautica.

Quomodo in geodæſia?

Quia I. Radius omnes linearum, ſuperficierum, & corporum affectiones metitur. II. Autores Geodæticis Geometriæ emolumentis ſcripta ſua exornarunt, vt Polybius, Quintilianus, Vitruuius.

Quomodo in Mechanicis?

Quia eius vſus apparet in quinque facultatibus mechanicæ Geometriæ, vt in cuneo, polyſpaſto, vecte, cochlea, axi peritrochij, quæ à Pappo & Tzetze proponuntur: ſed adduntur circulus, libra, forceps, forfex, quæ omnes opifices beneficiarios habent.

Libra uirtute & facultate circulus eſt. Nam,
- *Centrum, eſt Spartum.*
- *Diameter, eſt iugũ ſeu ſcapus & librile.*
- *Radij tres ſunt*
  - *Duo brachia iugi, paribus interuallis expanſa in peripheriam.*
  - *Agina, quæ ſuſpenditur, tertius eſt radius intra quam perpendiculare iugo examen (das zünglin in der Wag) libramẽti uel æquilibrij & æquamenti iudicium facit. Eſtq́ tum iugũ ipſum plano horizontis parallelum.*

Quomodo in fodinis?

Quia Geometricis manibus diuitiæ Plutonis effodiuntur & eruuntur è terra.

Quomodo in re militari?

Quia (ait Plato de principe ciuitatis) ad castra metandum, ad occupandum locum, contrahendum & laxandum aciem, tum copias cæteris modis ordinãdum in ipsis & itineribus & prælijs plurimum interest, Geometricus'ne sit an non.

III. DE COMPENDIARIA VIA MATHESCOS.

Est'ne tanta obscuritas Mathematum, vt vulgò dicitur?

Est sanè. Nam quindecim libris elementorum nihil vnquam humana manu obscurius scriptum est. Ad Euclidem enim venienti, antecedentium artium studium, iocus & ludus videtur fuisse. Elementis verò Mathematicis qui operam det, eum serio studere ac discere: hic verè esse μάθησιν καὶ μαθητικήν. Nusquam animus magis excitatus & erectus, magis ad rem attentus conuersusq;, nusquam iudicium acrius, nusquam memoria promptior constantiorq; exigitur. Veruntamen vt Plutarch. annotauit, obscuritas ista vbi semel initio deuorata sit, ridicula videtur: & miramur à principio nobis perobscurum fuisse, quod perceptum, facilimum imò iucundissimum gratissimumq; accidat.

Quomodo igitur explicanda est illa obscuritas?

Per artem Logicam. Obscuritas quidem duplex est, vna doctrinæ, alia doctoris. Etsi itaque mathemata acuta subtiliaque sunt, modo tamen quodam doceri possunt, vt minore multo labore ac difficul-

tate

pate perdiſcantur. Obſcuritas enim doctoris neque perſpicuo ſermonis genere loquentis, neq; diſtincta & facili via procedentis, refugienda eſt: quo in genere plerique Mathematici peccant, & ſuum illud ANTIQVVM occinunt ac mordicus retinent.

Quænam eſt cauſa huius obſcuritatis?

Quia Logicas leges Mathematici non ſeruarunt.

Quomodo examinanda eſt illa obſcuritas?

Iiſdem legibus Logicis. Nam,

Leges ratæ & confeſſæ ad Mathematicam quæſtionem ſunt afferendæ. Nam ſi qui diſceptãt inter ſeſe, legibus contrarij ſint, nunquam iudicium rectè atque ex ordine conſtituetur.

At Logicæ leges de Materia & Forma artis, ſunt ratæ & concesſæ. Nam Ariſtotelis leges de Materia artiũ approbauit Proclus lib. 1. comment. cap. 11. & lib. 2. cap. 7. De Forma verò ſex capitibus: nimirũ lib. 1. cap. 2. 3. 4. 7. 14. & lib. 2. cap. 2.

Logicæ igitur leges de Materia & Forma artis, ad Mathematicam quæſtionem ſunt afferendæ.

Benè itaque res habet, atque hoc nobis fundamentum eſto, è legibus per Proclum receptis & approbatis poſitum & locatum.

Matheſis legitima complectitur mathemata neceſſaria, homogenea, propria, ordineq; à natura prioribus diſpoſita.

At Proclus & Euclides ab iſta via regia aberrarunt.

Proclus igitur & Euclides matheſim legitimã non inſtituerunt.

Vbi ergo aberrarunt?

Proclus errauit in origine, nomine & genere Matheseos, in titulo operis, in laude Euclidis.

I. Quomodo in orgine Matheseos?

Proclus verbosissimè disputat lib. 2. cap. 4. & 6. aduersus Platonem & Aristotelem, Mathematicas artes ab hominibus sensuum beneficio neq; obseruatas neq; inuentas esse, sed à natura insitas & ingeneratas: idq; tribus syllogismis:

I. A sensibus nulla accurata aut inuincibilis ratio aut demonstratio oritur.
At in mathematis requiritur accurata & inuincibilis ratio demonstratioq;.
Mathemata igitur à sensibus non sunt.

II. Sensilia sunt posteriora intelligibilibus.
At mathemata non sunt posteriora intelligibilibus.
Mathemata igitur non sunt ex sensilibus.

III. Ab eo quod est mente deterius, non est Mathematica.
At sensus est deterior mente.
A' sensu igitur non est Mathematica.

Vnde est hic error?

Est à Pythagora, qui μετεμψύχωσιν animorum è corporibus alijs in alia commentus est: vnde absurda permulta sunt consecuta, vt ista sunt, quæ modò ex Proclo conclusimus. Is enim lib. 2. cap. 1. concludit animam Mathematici generis autorem parentemq; esse, qui à diuina mente delibatas omnium rerum species non solùm Mathematicas acceperit. Itaque mathemata singularibus formis antiquiora esse in animis, neque vt Aristoteles putauit, animum hominis esse tabulam nudam, sed Mathematicis rationibus pictam & ornatam, seque suapte natura pingen-

pingentem & formis omnibus exornantem.

Sed quæ'nam est hîc veritas?

Ex sententia Platonis & Aristotelis, animo FACVLTAS omnium rerum percipiendarum à Deo & natura data est, vt oculo facultas omnium colorum cernendorum: non autem animo ipsæ rerum FORMAE insitæ sunt, vt nec oculo species colorũ. Atq; hæc de origine Matheseos.

II. Quomodo in nomine errauit Proclus?

Nomen Matheseos attulit ad superiorem errorem tanquam nouum argumentum. Nam,

Ἀνάμνησις recordatio, est rerum æternarum.
At μάθησις est ἀνάμνησις. Omnis disciplina est recordatio, sed ea præcipuè quæ mathesis appellatur.
Mathesis igitur est rerum æternarum.

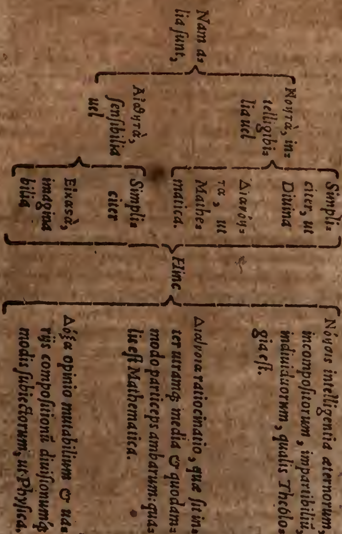
Quæ'nam hîc erit Proclo satisfactio?

Eadem quæ fuit de origine Mathematicæ. Recordatio ista adhuc in nemine tam fœlix inuenta est, vt eius beneficio sine studio & labore ars vlla perciperetur. Nomen verò ipsum pro arbitrio factum est, nec vlla quidem initio excellentia, sed proprietate: solæ enim multis seculis artes Mathematicæ fuerunt.

III. Quomodo errauit in genere artis?

E' Platone & Aristotele distinxit tria genera artis iudicijque.

Nam



Ex qua partitione Proclus concludit Mathematicam esse disciplinam διανοητικὴν ratiocinatiuam, iudicioque τῆς διανοίας & ratiocinationis diiudicari. Sed dupliciter hîc errat Proclus: & quia nihil proprium Mathematicæ hîc docet, & quia fallaciter captiose agit. Nam,

I. Commune artium omnium, non est proprium Mathematicæ.

At ista doctrina triplex est omnium artium. Nā cum principia per se clara manifestaq; considerantur & iudicantur, νόησις est: cum ex his alia demōstrata & conclusa iudicantur, διάνοια: cum in exemplis vsus ipse non perinde certus est, δόξα vel εἰκασία. Et quidem singulorum elementorum (si per se manifesta sunt) iudicium νόησις est & enunciationis solum: item singulorum exemplorū (si protinus manifesta non sunt) iudicium δόξα & enunciationis tantum: In cæteris elementis dubijs διάνοια & syllogismus est. Quin etiam in conclusionibus demonstrationum iudiciū est συλλογιστικὸν & διανοητικόν.

Ista igitur triplex doctrina non est propria Matheseos, nec tenet legem καθόλου πρῶτον.

II. Doctrina fallax & captiosa, è Mathematicis artibus est explodenda.

At ista doctrina quòd Mathematica sit διανοητική, non autem νοητική, non δοξαστική, fallax & captiosa est: & Proclus à seipso refellitur. Sic enim postea Mathematicas demonstrationes triplices facit, τὰς μὲν νοερωτέρας, τὰς δὲ διεξικωτέρας, τὰς δὲ καὶ δόξαις ἐφαπτομένας: alias intelligentiæ pleniores, alias ratiocinationi coniunctiores, alias viciniores opinioni.

Ista igitur doctrina è Mathematis est explodenda.

IIII. *Quomodo errauit in titulo operis?*

Quia elementum id vocat, in quod cùm sit magis simplex, compositum resoluitur: quod nomen, ea significatione elementis Euclidis non potest conuenire: idem enim erit quod principium. Itaq;

Ele-

Elementum est nihil aliud quam principium.

Et Euclidis libri non tantùm continent principia, sed & propositiones.

Euclidis igitur libri non rectè elementa dicuntur secundum Proclum.

Quid ergo sunt Elementa?

Elementa στοιχεῖα, à Platone primùm, deinceps à cæteris nominata sunt præcepta de numeris & figuris, quia è Pythagoræ, Platonis, Aristotelis sententia plurimarum postea disciplinarum principia essent, vt Astrologiæ, Opticæ, Musicæ, Physicæ, vniuersæ denique Politicæ. Et sic Maximus in προθεωρίᾳ, τὰ στοιχεῖα vocat εἰσαγωγὰς introductiones.

V. *Quomodo errauit in laude Euclidis?*

Hic præcipuè causæ obscuritatis è materia & forma στοιχειώσεως vniuersæ disceptandæ sunt.

Proclus in Euclide duo laudat
- Ἐκλογὴν *delectū: qui tamē multa uitia habet in*
  - Ἔλλειψιν.
  - Ὑπεροχὴν *Redundantia.*
- Τάξιν ἢ μέθοδον: *in qua uituperatur Hysterologia.*

I. ἘΚΛΟΓΗ.

ELLYPSIS ELEMENTORUM.

Euclides igitur non est legitimus στοιχειωτής?

Non est. Nam,

Legitimus στοιχειωτής non omittit necessaria, cognata, propria: nec admittit redundantiam, aut methodi hysterologiam.

At Euclides multa omittit, & admittit redundantiam

dantiam & hysterologiam. Assumptio demonstranda est per partes.

Non ergo est legitimus methodicus.

Quottuplex est Ellipsis?

Duplex: Arithmetica & Geometrica.

Quánam est ellipsis Arithmetica?

Numeratio communis de additione, subductione, multiplicatione, diuisione nulla est simplicium numerorum integrorum, fractorum, itē comparatorum. Comparatorum in rationibus genera & species tribus tantùm definitionibus multiplicis, partis, partium compræhenduntur aut ne compræhenduntur quidem. Proportio Arithmetica nulla est: quæ tamen omnia sunt necessaria, cognata, propria.

Quæ'nam est ellipsis Geometrica?

I. Quoad Geometriā, nihil adhibuit (ait Proclus) de varijs generibus linearum & angulorum: nō adhibuit fabricam trianguli æquicruri & varij. De superficiebus planis tantum præcepit: de rotundis & mistisq; earum lineis & affectionibus tacuit.

II. Quod Stereometriam de solidis corporibus pauca proposuit Hypsicles duos Euclidi ex Apollonio libros adiecit.

REDVNDANTIA Elementorum.

Qualis est in Elementis redundantia?

Est partim Logica, partim Mathematica: tā à Proclo quam ab Euclide accersita.

I. E' PROCLO.

Quénam est Redundantia Procli?

Est in questionum, principiorum, propositionum, conuersionum differentijs.

Quæ'nam facit genera questionum?

An est, quid est, quale quid est, propter quid est.

Quæs-

Quomodo distinguit genera principiorum?

Lib.2.cap.8.principiorum genera distinguit in hypotheses,postulata,axiomata.

Quot considerat in propositione?

Duo:Partes & Genera.

Quot facit partes propositionis?

Duas: Datum & Quæsitum: vt,Super data recta, triangulum constituere: hîc datur recta, quæritur constitutio trianguli.

Quot facit eius genera?

Propositio (ait lib.2.cap.8.) est Euclidi problema vel theorema.

Quid est problema?

Est propositio quæ proponit aliquid inuenire & machinari : vt inuenire maximam mensuram, secare lineam,constituere triangulum, describere quadratum & similia in magnitudinum additione, subductione, contactu,sectione, positione, applicatione: & quidem proponit enunciatione tantum imperfecta.Proponit enim possibile esse inuenire,secare,cōstituere,describere, verbumq; δυνατὸν possibile interdum adhibet: vt 18 & 10.p.9. Itaq; talis propositionis explicatio demonstratione continetur.

Quid est Theorema?

Quod statuit cognoscere demonstrareq; inuentæ constitutæ rei qualitatem.

Quot facit conuersionum genera?

Varias(ait Proclus)conuersionum species Euclides habet,modò simplices, modò compositas, modò tota totis conuertentes,modò tota partibus, modò contra quasdam partes quibusdam partibus.

Quid sentiendum est de his conuersionibus?

Negatio generalis generaliter conuertitur : affirmatio vtraq; (generalis & specialis) specialiter tantum:negatio specialis non conuertitur,ait in Analyticis Aristoteles.Sed propositionum conuersio in totis ele-

tis elementis nulla prorsus est: est tamen conuersio rerum seu terminorum, ut scholæ vulgò loquuntur, frequentissima: præsertim subiecti & proprij adiuncti: ut, Si quatuor numeri sunt proportionales, factus à medijs æquatur facto ab extremis: & si hoc, illud. Nulla autem est propositionis talis conuersio, neq; huius commentitiæ conuersionis vsus vllus est ad vllam quæstionem probandam: nec in totis Euclidis elementis vlla demonstratio hinc sumpta reperietur, vt antecedens per conuersam vel conuersa per antecedentem demonstretur, sed conuersæ plerũq; probãtur per impossibile opposită antecedẽtis.

II. EX EVCLIDE.

Quæ nam est Euclidis redundantia?

Est in elementis & elementorum demonstrationibus.

Quottuplex est elementorum redundantia?

Duplex: Logica & Mathematica.

Quæ nam est redundantia Logica?

E' Logica rationum & proportionũ primò sunt nouem definitiones quinti, ut 3. 4. 6. 7. 8. 9. 11. 12. 13. Sunt item propositiones nouem è materia Logica 4. 7. 8. 9. 10. 11. 13. 14. 16. Deinde propositiones quatuor lib. 7. de alternatione repetitæ è lib. 5. 9. 10. 13. 15. Illic enim fuerant magnitudinis nomine.

Quottuplex est redundantia Mathematica?

Duplex: Arithmetica & Geometrica.

Quæ nam est Arithmetica?

Est repetitarum è quinto libro in septimum trium definitionum, partis, multiplicis, proportionis: item octo propositionum, quę nomine magnitudinis fuerant item quinto in libro, & tandem nomine numeri repetuntur septimo: nempe 5. 6. 12. de compositione: 7. 8. 11. de diuisione: 14 de æquatione ordinata: 22 de perturbata. Item octodecim specialium propo

 sitionum

ſitionum nullum vſum habentium, quem generales non habeant vberiorem & promptiorem: imò quæ ſpeciem doctrinæ nullã nouam habent: ſed ſpeciem tantũ exempli ſubiecti. Tales propoſitiones ſunt vndecim quinti libri, vt 1.2.3.4.5.6.14.20.21.24.25. item ſex ſeptimi: vt 5.7.8.9.10. item 20. p. 9.

Quæ nam eſt Geometrica?

In primis libris rarior eſt: eſt tamen ea quædam vt 7. p. 1. vt (ne ſingulas referam) totus decimus liber, exceptis ſymmetrorum & rationalium definitionibus. E' quinq; poſtremis libris, qui Stereometriæ attribuuntur, ſi 24 propoſitiones ſubduxeris ex 85: reliquæ 61 ſpeciales è generalibus deductæ aut prorſus inanes & otioſæ reperientur. Atque ita Geometrica & Stereometrica redundantia erit 171 propoſitionum: quæ ſi prioribus aggregentur, redundantia erit 222 elementorum.

22.	*Logica:*	
29.	*Arithmetica:*	*elementa.*
171. / 222.	*Geometrica.*	

Quæ nam eſt redundantia in demonſtrationibus elementorum?

In his redundantia vix eſt credibilis: & Theonis culpa hæc videri propria poſſit, qui demonſtrationes aſſumpſit ſibi. Enimuerò quæſtio hæc præcipua conſideranda eſt. Obſcuritas enim Mathematicarum artium incredibilis hinc orta eſt. Incredibile enim dictu eſt quanta ambitio Mathematicum ferè præſtantiſſimum quemq; inſano quodam demonſtrandi ſtudio ita tranſuerſum egerit, vt nihil ſit in totis Mathematis magis deplorandum. Matheſis ſimplicior fuit in Thalete, Pythagora & reliquis, vſq; ad Hippocratem: deinceps cum fœcundis frugibus inutiles herbas neſcio quomodo collegit. Itaq; vt quiſque ſibi paulò ingenioſior atq; acutior viſus eſt, ita

non

non vſu & exemplis inſignibus, ſed ſyllogiſmis vndecunq; expletis, quamcunq; rem oblatam demonſtrandam ſibi vendicauit. Sed tamen artificium demonſtrandi Euclideum videamus: legē demonſtrabilis enunciati, legem etiam demonſtrationis exquiramus. Primò enim demonſtrat indemonſtrabilia, vt enũciata clariſſima & ſyllogiſmum iam probatũ.

I. Quæ nam eſt lex demonſtrabilis enunciati?

Elementa duplicia ſunt: alia per ſe clara & manifeſta, ideoq; definitionibus & partitionibus declaranda, poſtulanda, omninoque in principijs numeranda: iudicio denique νοητικῷ contenta. Alia ſunt per ſe obſcura & ignota, ideoq; ſyllogiſmo demonſtrabilia & διανοητικῷ iudicio ſtatuenda. Itaq;,

Elementa per ſe clara & manifeſta, non ſunt demonſtranda.
At principia, ſunt elementa per ſe clara & manifeſta.
Principia igitur non ſunt demonſtranda. Itaq;,
Qui principia demonſtrat, contra leges demonſtrabilis enunciati facit.
At Euclides demonſtrat principia vt definitiones, partitiones, poſtulata.
Facit igitur contra leges demonſtrabilis enunciati.

Vbi demonſtrauit definitiones?

Definitiones alternationis, compoſitionis, diuiſionis, æquationis ab Euclide ſunt in dubias propoſitiones conuerſæ in quinto & ſeptimo. In Geometricis id eſt rarius: è definitione tamen æqualium angulorum facta eſt 23.p.1. ſic è definitione parallelogrammi factæ ſunt 33. & 34.p.1.

Vbi partitiones?

In Arithmeticis 4 & 34.p.6. è definitione bimediæ & partitione ſimul 25.p.10.

Vbi postulata?

In Arithmeticis postulanda prorsus sunt omnia, quæ quidem insignem & artis nomine dignam habeant, aut protinus è propinquo elemento deducenda, vt demonstrationibus Euclidis in Arithmetica nihil opus sit. Tales sunt propositiones quatuor librorum Arithmeticorum, quinti, septimi, octaui, noni. In Geometricis turba minor est, sunt tamen propositiones quædam, vt primi libri 2.3.31.46. vt secundi decem primæ, quæ numeris etiam possunt explicari, vt tertij præsertim 5.6.10.11. quarti & sexti non tam multæ sunt, sunt tamen nonnullæ, vt quarti problemata disertè expressa. 1.6.7.8.9 12.13.14. sexti autem propositiones 16. 17.21. Decimi libri præcipua ἀλογία ista fuit: materies enim illic fuit definitionum tantùm & partitionum. In vndecimi libri propositionibus 40, nulla fuit, quæ si generales antecederent, syllogismum requireret.

Quæ nam est redundantia in demonstrationibus syllogismorum?

Syllogismus est singularis & summa in iudicio enunciatorum dubiorũ regula, potiusq; omnes Mathematicæ artes falsæ fuerint, quàm syllogismi concessis propositione & assumptione, conclusio non vera sit: & Mathematici quicunq; unquam fuerunt, syllogismum concludendæ veritatis & iudicandæ instrumẽtum esse crediderunt: secus quid erat opus syllogismo, nisi veri examinandi instrumento? Attamen Theon hoc tanto tamq; diuino iudicij lumine, tenebras demonstrationum suarum clariores esse putat. Syllogismi enim complexiones demonstrat partim integras, partim enthymematicas.

Vbi demonstrat syllogismos plenos?

Syllogismus integer est in 14 & 16. p.8. Si quadratus metiatur quadratum, & latus metietur latus. Et si latus metiatur latus, & quadratus metietur qua-

dra-

dratum. Si quadratus non metiatur quadratum, neque latus metietur latus. Et si latus non metiatur latus, neque quadratus metietur quadratum. Hic duo syllogismi sunt inuoluti:

I. Si quadratus quadratum metiatur, latus metietur latus.
Ergo si latus non metiatur latus, neq; quadratus metietur quadratum.

II. Si latus metiatur latus, & quadratus metietur quadratum.
Ergo si quadratus non metiatur quadratum, neque latus metietur latus.

Propositiones amborum syllogismorum sunt in 14. p,8. Assumptiones & complexiones sunt in 16. p.8. vbi è complexione syllogismi, data nempe & concessa propositione & assumptione Theon facit propositionem demõstrabilem, non alio tamen (quod magis mirere) argumẽto quàm syllogismi ipsius. Tales syllogismi sunt in 30. p.1. in 4. 9. 21. 24. 30. 33. 34. p. 3. in 11. p. 5. in 15. 17. 18. 37. 41. p. 7. in 1. 3. 7. 15. 17. 22. 23. 24. 25. p. 8. in 3. 4. 5. 6. p. 9. in 7. 8. 9. 10. 16. 18. p. 10.

Vbi demonstrat enthymemata?

Euclidis diligentia plerisq; locis laudabilis est. Siquidem vbi animaduertit ipse è demõstrato aliquo aliquid concludi posse, fecit λῆμμα & πόρισμα sumptum & corollarium. Lemma quod aliqua tantùm declaratione indigeat. Talia sunt lemmata ad 22. p. 6. & 28. p. 10. Corollarium quod protinus è facta demonstratione tanquam lucrum aliquod accipitur. Eiusmodi corollaria sunt ad 4. p. 2. & 1. p. 3. & 16. p. 3. & locis præterea plurimis. Atque in his lemmatis & corollarijs enthymematum, iudicium Euclidis vel Theonis valde laudandum est: quippe qui viderit quid ex quo iam esset demonstratum, ne inutiliter nugando idem repeteretur. Veruntamen diligen

tia ista perpetua non fuit. Frequenter enim enthymematis propositio vel assumptio præterita erat manifesta. Atq; ex eius tacitæ intelligentia, syllogismi iudicium facilè potuit expleri. Attamen tanquam nusquam ea fuisset, ita propositiones demonstrabiles ex talis enthymematis complexione quadam factæ sunt.

Vbi est propositionis ἔλλειψις?

In 4.p.1. deest syllogismi propositio illa commentarijs Procli declarata, imò ab Euclide ipso in 23.p.1. conuersa ex axiomate æqualium angulorum.

Anguli cruribus congrui, sunt æquales. Deest.
At anguli æquicruri, æquales basi: sunt anguli cruribus congrui. 4.p.1.
Anguli igitur æquicruri sunt æquales.

Vbi est assumptionis ἔλλειψις?

In 19.p.7. Sic Euclides loquitur:

Si quatuor numeri sint proportionales factus è primo & quarto est æqualis facto è secundo & tertio.

Deinde sequitur in 20.p.7.

Si tres numeri sint continuè proportionales, factus ab extremis est æqualis facto à medio.

Euclides non facit cōsectarium, sed propositionem demonstrabilem. Verùm assumptio tantùm deest eiusmodi.

At tres continui sunt quatuor ratione & medius est pro secundo & tertio.

Itaq; admirabilis è tali Logica minimè necessariarum demonstrationum turba nata est. Si quis enim subtiliter versus heroici modò quindecim elementorū libros metiatur, supra 40 millia versuum in demonstrationibus eiusmodi reperiet. Aristoteles in veterum philosophorum decretis multa peccata ait esse δι' ἀπαιδευσίαν τῶν ἀναλυτικῶν. Atque hæc de Apodictica Euclidis, Theonisque laude prima pars est

quod

quod demonstret indemonstrabilia, vt clarissima enunciatorum singulorum iudicia (vt definitiones, partitiones, & postulata) & syllogismum iam probatum.

II. *Quæ'nam est lex demonstrationis?*

Demonstratiua methodus (inquit Proclus) est transitus à principijs ad quæsita. Hic Proclus demonstrationem facit conclusionem quæstionis ex causa. Quæ demonstratio sola legitima est, solaque scientiam parit: quia ex causis prioribus & notioribus sola progreditur.

Quid si causa ignota sit?

Tum quæstio occurret, Vtrum præstet inductioni & experientiæ rerum simpliciter credere, quàm à posterioribus argumentis, licet necessarijs (vt adiuncto signo, vt opposito impossibili, vt proportionali comparato) rem antecedentem & natura priorē demonstrare. Sophisma enim hic est Aristoteli τὸ αἰτεῖσθαι τὸ ἐξ ἀρχῆς, petere propositum, non demonstrare. Itaque & Mathematicorum elementorum veteres illi autores, Thales, Pythagoras, Oenopides, Anaxagoras, Theodorus, per impossibile nihil demōstrarunt. Primus Hippocrates (vt Proclus testatur) ἀπαγωγὴν in Mathematicas artes induxit: & quidem hęc demonstratio docet tantùm per accidens, ait Proclus ad 1. p. 1. nec ideò scientiam vllam parit. Quæ causa fuit, vt στοιχειώτεῖ sequuti quidam, talem demonstrationem reiecerint, ait idem Proclus lib. 2. c. 6. vbi etiam ait à nonnullis & comparationis argumentum repudiatum esse. Nec enim comparatio est apodicticum scientiæ argumentum. Atqui vbi res aliqua dubia fuerit, ibi ferè Euclides, Hippocratis ἀπαγωγὴν vel comparationem aliquam adhibet: ex causa autem demonstratio rarissima est.

Quid ergo respondendum est ad eiusmodi quæstionem?

In totis syllogisticis demonstrationibus, quæri-

tur τὸ ὅτι & vtrum verum: quod quocunq; argumento (modò necessario & aperto) conclusum sit, satisfactum videtur. Et tamen qualiacunque argumenta sint, si propositiones (è quibus demonstratur) sint generales & vniuersales, causæ erunt specialium.

Quod'nam est Procli artificium in rebus demonstrabilibus?

Omnis problematis & theorematis partes sũt 6

- *Propositio, cuius duæ partes*
  - *Datum, quod fit quadrupliciter*
    - *Ratione.*
    - *Situ.*
    - *Magnitudine.*
    - *Specie.*
  - *Quæsitum.*
- *Expositio, quæ est dati, ideoq; quatuor illis modis fit*
- *Determinatio, quæ est quæsiti.*
- *Constructio, quæ est adiectio deficientium dato ad quæsiti uenationem.*
- *Demonstratio, quæ est collectio propositi ex concessis.*
- *Conclusio, quæ est reditus ad propositionem confirmando.*

Quid de his sentiendum est?

Sophismata esse, indigna quæ pluribus refellantur.

Quæ'nam igitur tandem erit demonstratio?

Pręcipua demonstratio est, vbi ex causis non proprijs, sed generalibus speciales propositiones explicantur. Hæc πρῶτα μέτρα hîc sunt, quæ Philoponus ἀσύστοχα facit.

Demonstratio nis μέστερ
- Πρόστεν ex causis
  - Proprijs nulla sunt.
  - Generalibus multa sunt.
- Δεύτερ per
  - Impossibile
  - Similes
  - in numero maximo sunt.

Qualis est ista per simile & impossibile in totis elementis demonstratio?

Laus doctrinæ est in succincta & breui perspicuitate. Atqui hisce nostris demonstrationibus demonstratio præstantissima visa est, quæ prolixissima esset & quamplurimas antegressas propositiones complexa: ut 35.p.11. sex & quadraginta syllogismos habet, cui par est 11-p.13. In quibusdam syllogismorū mediusfidius Oceanus est, vt in vltima noni: ac tum demonstratio demonstratori suo visa est pulcherrima & excellentissima, cum esset prolixissima & obscurissima. Atq; proportionū & similitudinum tam multiplices, tamq; varij nexus ferendi sint, præ quibusdam propositionibus ad impossibile: ut sunt demonstrationes.2.5.10.11.12.18.p.12. per impossibilia maioris & minoris. Vnum demonstrationis genus est in elementis rarissimum secundo libro, ubi demōstratur aliud quàm propositum fuerat: æqualitas planorū illic proponitur, figura autem & fabrica demonstratur, quod non tantùm Logicam, sed memoriam demonstrationis mirabiliter arguit.

II. ΤΑΞΙΣ.

Qualem ordinem & dispositionem approbat Theon in Euclidis elementis?

Euclides (ait Proclus) præcipuè suspiciendus est & admirandus τῆς τάξεως ἕνεκα gratia ordinis & collocatio-

locationis: omnes dialecticas methodos adhibuit: διαιρετικὴν diuisiuam ad species inueniendū, ὁριστικὴν definitiuam in essentiæ rationibus, apodicticam in transitu à principijs ad quæsita, analyticam in quæstionum reditu ad principia.

Sunt' ne hæ veræ methodi?

Non sunt. Nam,

Materiæ methodi, non sunt variæ methodi species. Alia enim est Logica cogitandis & inueniendis argumentis singulis, nec non totis artibus: alia collocandis & æstimandis.

At diuisio, definitio, ἀπόδειξις, ἀνάλυσις: sunt materia methodi. Nam definitio & diuisio argumenta sunt ad disponendū methodo proposita & tanquam lapides sunt in hac architectura methodica. Ἀπόδειξις syllogismus est ex causa cōcludens effectū: ἀνάλυσις est quædam inuersio ἀποδείξεως, ex effectis nempe causam concludens,

Non igitur sunt variæ methodi species.

Quæ' nam igitur est vera methodus?

Proclus eodem loco veram tandem methodum attingit, vbi τὴν συνέχειαν, τὴν οἰκονομίαν, τὴν τάξιν, continuationem, œconomiam, ordinem in elementorum antecedentium & consequentium collocatione singularem esse confirmat, quodq; Euclides siue addat siue adimat, nunquam tamen è scientiæ loco excidat, nec labatur in contrarium errorem vel ignorantiam. Ista igitur est quæstio methodi propria, vbi inuentorū, imò etiam νοητικῶ enunciati, vel διανοητικοῦ syllogismi iudicio iudicatorum compositio antecedentium cōsequentiumq; per totā artem ordo digeritur, quā methodum in primis intelligi cupio. Hæc enim Logicarum laudum & virtutum maxima est, quæq; ad Mathematicas artes constituendum vires præcipuas habet.

Quam'nam igitur hic laudem Euclidi tribuit Proclus?

Euclides(ait Proclus lib.2.cap.8.)communia principia primo ordine constituit, propositiones ex his conclusas secundo collocauit, easq; problematis & theorematis distinxit.

Est'ne vera hæc laus?

Non est. Nam corpora, membra, genera, species mathematum, quadruplicem confusionem & hysterologiam in elementis continent.

Quæ'nam & quot in elementis Mathematicis corpora nominas?

Duo. Arithmeticum & Geometricum.

Vtrum natura prius & simplicius est?

Arithmeticum prius est, ideoq; Geometricū δευτέραν ἔχει τάξιν post Arithmeticum, ab eoque perficitur ac terminatur. Quicquid enim est in Geometria ῥητὸν ϗ γνωστὸν explicabile & cognobile, arithmeticis rationibus explicatur & cognoscitur. Hæc Proclus rectè respondet & ita 5.6.7.8.p.10.docetur.

I. *Quæ'nam ergo est hysterologia in corporibus?*

Qui Geometriam natura posteriorem præponit, & Arithmeticam naturæ priorem postponit: hysterologiam committit.

At Euclydes Geometriam de planis primo elementorum loco, Arithmeticam in totis 5.7.8.9.libris ordine longè diuerso permiscuit.

Euclides igitur in corporibus elementorum elenchum commisit.

II. *Quæ'nam est hysterologia in membris principiorum?*

Principia accumulat primo libro planorum, tertio curuilineorum, quinto & septimo numerorum, decimo triplici loco symmetrorum, asymmetrorum, ratio-

rationalium, irrationalium, ſecundo binomiorum, tertio reſiduorum, vndecimo ſolidorum. At methodus iſta valdè agreſtis eſt. Neque enim natura initio ſyluæ, omnium arborum radices propoſuit: nec architectus initio ciuitatis omnium ædificiorum fundamenta collocauit, ſed ſuis arbores ſuas radices natura, ſuis ædificijs ſua fundamenta architectura ſubiecit. Itaq; debuerat Euclides definitionem trianguli triangulorum, quadrãguli quadrangulorum, multanguli multangulorum doctrinę præponere: eamq; viam in cæteris principijs ſeruare.

III. *Quæ nam eſt hyſterologia in generibus numerorum & magnitudinum?*

Genera numerorum non ſunt digeſta: comparatorum genera toto quinto libro & ſeptimi parte præceſſerunt, ſimplicium ſecuta ſunt. Eadem in figuris hyſterologia eſt. 1. Figuræ planæ ſunt natura priores ſolidis & ita Geómetria à Stereometria diſtinguitur. At 1.16.p.12. item 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12. precipuaque pars 13.14.15.p.13. ſunt Geometricæ de figuris planis, neq; quicquam ſtereometria vtuntur. 2. E' Geometrię figuris, planæ & rectilineæ ſunt priores curuilineis, ideoq; omnino proponendæ. Euclides tertio libro præpoſuit curuilineorum, id eſt, circulorum doctrinam: rectilineorum autem partim præpoſuit primo & ſecundo, partim poſtpoſuit ſexto: rectilinei & curuilinei adſcriptionem comprehendit quarto. 3. E' figuris planis rectilineis priora ſunt triangula quadrangulis. At triangulorum & quadrangulorum doctrina permiſta omninò eſt.

IIII. *Quæ nam eſt hyſterologia in ſpeciebus generum?*

Propoſitiones ſpeciales plerumque generalibus antepoſuit Euclides. Arithmeticæ eiuſmodi ſpeciales multæ

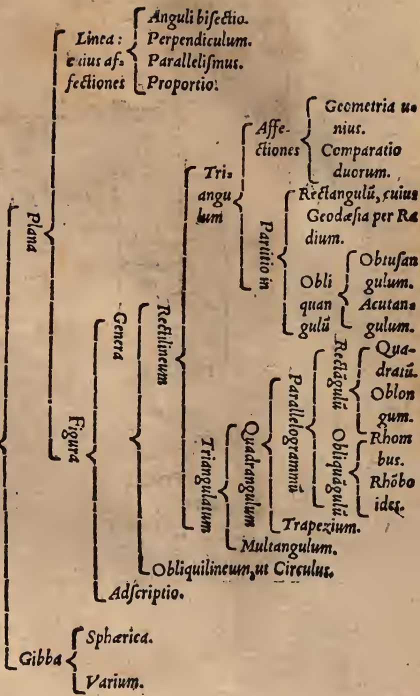
les multæ ſunt, vt è redundantibus illis 1.2.3.4.5.6. p.7.ad 12.24.22.16.19.p.5.& 11.p.7.Sic 5.6.7.8.9.10. p.7.ad 12.11.13.p.7.Geometricæ eiuſmodi item multæ ſunt, vt 16.17.p.1. ad 32.p. 1.vt 4.8.26. 35. 36. 37. 38.39.40.41.42.43.44.45. ad 1. p.6. Sic 11.12.p.8.ad 18.19.p.8.ſic 3. p.9.ad 4.p.9. Sic in Stereometricis 29.30.31.p.11.ad 32.p.11.Imò verò pro paucis propoſitionibus generalibus de propoſtione ex altitudine, reciprocatione, ſimilitudine infinitas ſpecialium propoſitionum facta eſt.

FINIS PROOEMII.

TABV-

Tabula Geometriæ generalis.




A. Circa superficiē est Geometria. Est autem superficies uel
Plana
Linea: cuius affectiones
Anguli bisectio.
Perpendiculum.
Parallelismus.
Proportio.
Figura
Genera
Rectilineum
Triangulum
Affectiones
Geometria unius.
Comparatio duorum.
Partitio in
Rectangulū, cuius Geodæsia per Radium.
Obliquangulū
Obtusangulum.
Acutangulum.
Quadrangulum
Parallelogrammū
Rectāgulū
Quadratū.
Oblongum.
Obliquāgulū
Rhombus.
Rhōboides.
Trapezium.
Triangulatum
Multangulum.
Obliquilineum, ut Circulus.
Adscriptio.
Gibba
Sphærica.
Varium.



Pyramis.
Pentaëdrum.
Cu- bus.
Pa- ral- lele pipe dũ
Planum ut
Prisma.
Hexaë- drum
Ob lon- gũ.
Pyra- mida- tum
Epen taë- dris
B. Circa corpus est Stereome tria solido rum. So- lidum est uel
Trapeziũ.
Polyëdrum.
Polyëdrum.
Sphæra.
Gibbum ut
Conus.
Varium
Cylindrus.

Quid est Geometria?



ES T ars benè metiendi. Finis enim Geometriæ est benè metiri: qui cõstat congruentia, multiplicatione & partitione: item comparatione rerum mensurabilium. Si quid enim magnum & difficile in toto Euclide uel Archimede & cæteris Mathematicis est, id per rationes & proportiones præcipuè est declaratum. Itaq; in rationum & proportionum doctrina, octo axiomata primi libri, tum liber quintus totus & septimi pars præcipua continetur.

Vnde sumuntur mensuræ?

Ex humanis membris digito, palmo, pede, cubito: quorum tria priora ratione quadrupla constant. Pes enim est 4 palmorum, palmus 4 digitorum, digitus 4 granorum hordeaceorum, ut granum minima mensura sit. Cubitus à radio ad extremum longissimum digitum est sesquipes. Ex his sunt mensuræ itinerum, ut passus, stadium, miliarium.

Vnde est nomen Geometriæ?

A' dimensione terræ, quod ex Aegypto primũ ortum est.

Quodnam est eius subiectum?

Magnitudo: ut linea, angulus, figura, superficies, corpus: hoc est, triangulum, quadratum, oblõgum, rhombus, rhomboides, trapezium, circulus: quæ sunt superficies: pyramis, pentaëdrum, cubus, oblongum, trapezium, octoëdrum, icosaëdrum, dodecaëdrum, sphæra, conus, cylindrus, quæ sunt corpora seu solida. Et de horum paucorum natura, affectionibus, comparationibus, rationibus, proportionibus & similitudinibus agit Geometria. Vtilissimũ

 autem

autem est harum specierum figuras principio noscere & memoriç infigere aut ab artificibus fabrefactas ad manus habere.

Quomodo vocatur magnitudinis extremum?

Terminus, ut punctum, linea, superficies. Itaque
Quibus terminatur magnitudo, ijsdem creatur, continetur, secatur.
At linea puncto, superficies linea, corpus superficie terminatur.
Linea igitur, superficies, corpus ijsdem creantur, continentur, secantur.
Item, Quo quid continetur & copulatur, eodem etiam secatur.
At linea, superficies, corpus, communibus uinculis puncti, lineæ, superficiei continentur.
Ijsdem igitur etiam secantur.

Est'ne magnitudo finita?

Omnis magnitudo actu est finita: sed infinita postulatur disciplinæ causa: unde ἀφαίρεσις abstractio agnoscitur.

Est'ne igitur ἀφαίρεσις Geometriæ propria?

Non est. Nam
Communis res non est propria Geometriæ, sed Logica.
At ἀφαίρεσις est communis.
Αφαίρεσις igitur est Logica.

Αφαίρεσις igitur tollit magnitudines Physicas?

Non tollit. Nam primò:
Si magnitudines reuera sunt in corporibus, ἀφαίρεσις Physicas magnitudines non tollit.
Sed illud.
Ergo & hoc. Deinde,
Intelligentia mentis non tollit physicas magnitudines.
At ἀφαίρεσις est intelligentia mentis.
Αφαίρεσις igitur non tollit physicas magnitudines.

Mentitur igitur ἀφαίρεσις?

Non mentitur. Nam primò:

Qui crassis symbolis utitur ad res notis significandas explicandum: non mentitur.

At Geometra crassis symbolis utitur.

Geometra igitur non mentitur. Et sic Aristotel. lib. 1. posteriorum cap. 8. οὐδ᾽ ὁ γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται ὥσπερ τινὲς ἔφασαν λέγοντες, ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι· τὸν δὲ γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν, ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. ὁ δὲ γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τὴν δὲ εἶναι γραμμὴν, ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα. Deinde:

Logica consyderat genera generaliter, & tamen generum essentiam docet in singularibus consistere:

At ἀφαίρεσις est Logica.

Ἀφαίρεσις igitur docet generum essentiam in singularibus consistere.

Quot sunt communes affectiones magnitudinis?

Quatuor: Symmetria, Ratio, Congruentia, Adscriptio: quarum duæ priores Arithmeticæ, posteriores Geometriæ sunt.

Quæ nam sunt symmetræ magnitudines?

Quas eadem mensura metitur, 1.2.d.10.

Quæ nam sunt rationales, ῥηταί?

Quarum ratio est explicabilis numero datæ mensuræ. Irrationales ἄλογοι, econtrà. 5.d.10.

Quæ nam sunt congruæ?

Quarum partes applicatæ partibus æqualem locum occupant. Hinc ἐφάρμοσις seu ἐφαρμογὴ congruentia linearum, superficierum & corporum.

Quomodo congruunt lineæ?

Quando puncta terminantia punctis, totæq; longitudines totis longitudinibus eundem locum occupant.

Quomodo superficies?

Quando lineæ terminantes lineis terminantibus areæ terminatæ areis terminatis eundem locum occupant.

Quomodo corpora?

Quando superficies æquales multitudine & magnitudine eundem & æqualem locum occupant. Hoc ἐφαρμόσεως genere corpora liquidorum siccorumque omnium metimur, replendo nempe æqualem locum. Sic monetarij monetas ex æquipondijs laminis æqualis loci repletione æquales iudicant.

Estn'e igitur ἐφάρμοσις ista rerum Physicarum?

Non est. Nam

Nihil Physicum est tantum abstractum.

Ἐφάρμοσις est tantum mentis & mente abstractorum.

Ἐφάρμοσις ergo non est Physicarum rerum, quæ singulas partes sensili loco discretas habent, ut corpora duo Physica simul esse nequeant.

Quod nam est axioma congruentiæ?

Magnitudines congruæ sunt æquales. Nam

Quæ magnitudines æqualem locum occupāt, sunt æquales.

At magnitudines congruæ æqualem locum occupant.

Magnitudines igitur congruæ sunt æquales. 8. axio. τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Est'ne reciprocum?

Non est. Nam triangulum parallelogrammo æquari potest, pag. 76. neq; tamen omninò congruere: & sic circulo quæritur æquale quadratum, quamuis incongruum, pagin. 131. quia ὁμοειδῆ similia specie tantum congruere possunt. Itaque etiam parellelogramma non congrua possunt æquari. pagin. 27.

Obiectio de axiomate ἐφαρμόσεως.

Mechanica è Geometria sunt reijcienda.
At ἐφάρμοσις est mechanica.
Ergo è Geometria est reijcienda.

Solutio.

I. Vtilitas artis cũ ueritate artis est coniungenda.
Ἐφάρμοσις est summæ utilitatis.
Ἐφάρμοσις igitur cum ueritate artis est coniungenda.

II. Principium Geometriæ luculentissimum, non est repudiandum.
Ἐφάρμοσις est principium luculentissimum.
Ἐφάρμοσις igitur non est repudianda.

III. Si mechanica à Geometria reijcienda sunt: etiam postulata, problemata, symmetria, ratio, regula & circinus reijcienda sunt.
At non hoc.
Ergo nec illud.

Vt autem cum Geometria mechanica copulanda sunt, ita mechanica à Geometria separanda non sunt. Itaque

Qui mechanicam à Geometricis principijs seiungunt, non agunt Geometricè.
At opifices, item mathematici cum instrumentis solis inueniunt duas medias proportionales, mechanicam à Geometricis principijs seiungunt.
Opifices igitur & mathematici plerique non agunt Geometricè.

Quæ nam sunt magnitudines adscriptæ?

Quando unius termini alterius terminis terminantur. Adscriptionis duæ sunt species, Inscriptio & Circumscriptio.

LIBER II. De Linea,

Quomodo diuiditur magnitudo?

In lineam & lineatum.

Quid est linea?

Est magnitudo tantùm longa. Euclidi dicitur μῆκος ἀπλατές: quam definitionem Aristot. lib. 6. Top. cap. 3. repræhendit. Nam,

Definitio, quæ fit negatione, est uitiosa: μὴ καλῶς ὥρισται, ἐὰν ἀποφάσει διαιρῇ τὸ γένος.

At hæc definitio fit negatione. ὁ τὴν γραμμὴν ὁριζόμενος, μῆκος ἀπλατὲς εἶναι, ἀποφάσει διαιρεῖ τὸ γένος. πᾶν γὰρ μῆκος ἢ ἀπλατὲς, ἢ πλάτος ἔχον ἐστίν. ἡ δὲ γραμμὴ μῆκός ἐστιν: ὥστε καὶ ἡ γραμμὴ ἢ ἀπλατὲς ἢ πλάτος ἔχουσα ἔσται.

Hæc igitur definitio est uitiosa.

Quæ nam sunt extrema seu termini lineæ?

Lineę termini sunt puncta. γραμμῆς πέρατα σημεῖα. 3. d. 1. Punctum autem est signum in magnitudine indiuiduum. Euclides definit id, cuius pars nulla est. σημεῖον οὗ μέρος οὐθέν. 1. d. 1. Sed ista definitio dupliciter repræhensa est:

I. Definitio quæ fit negatione, est uitiosa.

At hæc fit negatione.

Est ergo uitiosa. Nec obstat quod Proclus respondet:

Principia non possunt definiri nisi negatione.

At punctum est principium.

Negatione igitur necesse est id definiri. Nam

Si Procli defensio uera est, oportet omnia principia ab Euclide negatione definita esse.

At non hoc.

Ergo nec illud.

II. Definitio quæ in multas res transferri potest, est uitiosa.

At hæc Euclidis definitio in multas transferri potest: quia negatio, nihilum & nō ens quodlibet, ista definitione pūnctū fuerit.

Est ergo uitiosa.

Quomodo lineatur linea?

Motu pūncti. Omnis enim magnitudo generaliter Geometrico motu creatur: fiuntq; uno motu totæ figuræ. Sic motu puncti linea, motu lineæ circulus: motu semicirculi sphæra: motu trianguli conus, parallelogrammi cylindrus efficitur. Et una conuersione fit circulus, sphæra, conus, cylindrus: multiplicatione basis & altitudinis rectangula parallelitermina.

Quottuplex est linea?

Duplex. Simplex aut Mista.

Quottuplex est linea simplex?

Duplex: Recta aut obliqua.

Quid est recta?

Quæ intra suos terminos æqualiter interiacet. εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. 4. d. 1. Itaque recta est breuissima intra eosdem terminos.

Nam, Quæ linea æqualiter interiacet & cuius media extremis officiunt, est breuissima.

At linea recta est talis.

Est ergo breuissima.

Vtrum est prius natura, rectum an obliquum?

Rectum est prius natura: ut Plutar. in quæstionibus Platonicis ostendit, hoc argumento:

Parens & genitrix, natura prior est.



Recta igitur est natura prior.
Aristoteles quoque in mechanicis argumento simplicitatis id probat. Nam,
Simplicior magnitudo est prior.
At recta est simplicior obliqua. Nam in rotundo est ἐναντίωσις conuexi & concaui: at talis in recta

in recta dissimilitudo nulla est. Itẽ:quia si peripheria sit, est recta respectu centri:sed non si recta, ideò & peripheria.

Recta igitur est prior obliqua.

Denique uulgare prouerbium idem arguit:

Quo utrumq; cognoscimus & rectum & obliquum, id prius est:

At recto utrumque cognoscimus & rectum & obliquum: sic enim Aristot. lib. 1. de anima, cap. 5. τῷ εὐθεῖ ἐστι τὸ εὐθὺ καὶ τὸ καμπύλον γινώσκομεν: κριτὴς γὰρ ἀμφοῖν ὁ κανὼν, τὸ δὲ καμπύλον οὔτε ἑαυτοῦ, οὔτε εὐθέος.

Rectum itaque est prius.

Nec nos moueat Aristoteles: qui ut in alijs partibus philosophiæ: sic in hac parte sibi contradicit. Nam lib. 2. de cœlo, cap. 4. peripheriam recta & circulum rectilineo priorem esse natura duobus argumentis conclusit:

I. Perfectius est prius.

At peripheria est perfectior: quia nihil ei potest addi, potest autem rectæ.

Peripheria igitur est prior.

II. Simplicius est prius.

At circulus est simplicior: quia unius termini est, rectilineũ multorum terminorum.

Circulus igitur prior est rectilineo.

Vterque syllogismus falsus est. Nam primò prioris syllogismi propositio non est κατὰ παντὸς: neq; perfectius protinus etiam natura prius est. Nam perfectius est animal semine: neque tamen natura prius. Deinde assumptionis ratio non est καθ' αὐτὸ. Nam ut peripheriæ nihil addi potest ut peripheria sit: sic neque rectæ potest quicquam addi, ut recta sit.

Alterius syllogismi & assumptio & ratio itidem inconstans est: nam quod ad rationem attinet, simplicitas non arguitur numero terminorum, sed re-

rum terminatarum numero: ideoque

Si numero terminorum argueretur simplicitas: mundus esset simplicior arbore, leone, homine. Vnico siquidem termino comprehenditur mundus.

At non hoc.

Ergo nec illud.

Deinde quod ad assumptionē attinet, tota falsa est. Nam

Quod magis multangulum & multilaterū est, quàm ullum rectilineum: nō potest esse simplicius rectilineo.

At circulus est Ptolemęo polygonia, imò Aristoteli ipsi lib. 3. de cœlo, cap. 8. ὅλη γωνία: totangula figura.

Circulus igitur non est simplicior rectilineo.

Quid est obliqua?

Quę intra suos terminos inęqualiter interiacet. Eiusq; proprius est tactus, cùm s. linea obliqua à recta aut obliqua tangitur ita, ut inter se concurrentes, non intersecentur, si continuatę fuerint. 2. & 3. d. 3. Vnde sequitur, ut tactus fiat unico puncto: alioqui sectio esset non tactus, 13. p. 3. Inter obliquas autem pręcipua est peripheria.

Quid est peripheria?

Est linea quę distat ęqualiter à medio cōpręhensi spacij. Fit autem conuersione lineę, altero termino quiescente, altero lineante.

Quæ nam sunt species variæ lineæ?

In planis est κιτλοειδὴς, quæ refert flexus hederę & ἕλικες uariæ: aliæ sunt circa solida, ut ἕλικες circa sphęram, cylindrum, conum: aut in solidorum sectionibus: ut conicę & spiricæ. Conicę lineæ sunt ellipsis, hyperbole, parabole.

Quæ nam lineæ sunt ὁμοιομερεῖς?

Quarum quęlibet pars cuilibet parti congruit: ut in pla-

in plano simplices duę, recta & circularis: & una mista circa solidum. s. helix cylindracea.

Quot sunt affectiones duarum linearum?

Duę: perpendiculum & parallelismus.

Quae nam sunt lineae perpendiculares?

Sunt lineę inter se rectę, quarum altera in alteram incidens ęqualiter interiacet. κάθετος ἐστιν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν ἐφεστηκυῖα. 10. d. 1. Ideoq; recta insistens rectę, est ab eodem termino & eadem parte singularis.

Quae nam sunt parallelae?

Quę ubique distant ęqualiter. Ideoq; eidem parallelę sunt inter se parallelę. Parallelismus autem communis est linearum (rectarum & obliquarum) superficierum & corporum.

Quomodo definit Euclides?

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον, ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις. 35. d. 1.

A' quibus reprehensa est ista definitio?

Ab Aristotele, Posidonio & Gemino.

Quomodo ab Aristotele?

I. Qui generale specialiter definit, non docet καθολικῶς, sed σοφιστικῶς.

At qui demonstrat quòd rectę non concurrant, specialiter definit generale. Nam nõ concurrere est omniũ linearum rectarũ & peripheriarum quomodolibet ęqualiter distantiũ. Arist. lib. 1. Post. cap. 5. εἴ τις δείξειεν ὅτι αἱ ὀρθαὶ οὐ συμπίπτουσι, δόξειεν ἂν τούτου εἶναι ἀπόδειξις κυρίως, διὰ τὸ ἐπὶ πασῶν εἶναι τῶν ὀρθῶν. οὐκ ἔστι δὲ: εἴπερ μὴ, ὅτι ὡδὶ ἴσαι, γίνεται τοῦτο, ἀλλ' ᾗ ὁπωσοῦν ἴσαι.

Qui ergo demonstrat quòd rectæ non concurrant, docet non καθολικῶς.

II. Qui ex adiuncta qualitate, quæ demonstrari potest, definit: is non definitionem, sed demonstrabilem propositionem facit.

At qui

At qui lineas rectas parallelas ex eo definit q̃ non concurrant: affectionem demonstrabilem non concursus proponit. Aequidistantia enim causa est, non concursus.

Qui ergo sic definit, definitionem legitimam non facit.

Quomodo à Posidonio?

Is secundum argumentum Aristotelis assumpsit.

Quomodo à Gemino?

Definitio quæ alijs etiam rebus accommodari potest, non est legitima.

At hæc definitio alijs rebus competit. Nam utraque eius pars conuenit peripherijs concentricis: helicibus circa rectas positis: quia sunt in eodem plano: nec unquam concurrunt: denique hyperbole ad rectam & conchois ad rectam licet interuallum semper minuatur: nunquam tamen concurrunt.

Non igitur est legitima.

Quod nam est corollarium parellelismi?

Lineæ eidem parallelæ, inter se sunt parallelæ. Ex quo Euclides demonstrabilem propositionem fecit 30. p. 1. αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. Theon sumptis utrinque ad mediam parallelis, per secundam legem parallelarum demonstrat:

Si rectæ recta sectæ æquant alternos angulos, sunt parallelæ.

At sumptæ utrinque ad mediam sectæ, æquant alternos angulos.

Sumptæ igitur sunt parallelæ.

Item per primum axioma:

Eidem æqualia, inter se sunt æqualia. τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

At lineæ utrinque sumptæ, æqui distant eidem mediæ.

Sunt igitur inter se æquidistantes.

Pro-

Proclus demonstrat per impossibile:

Si extremæ ad mediam parallelæ, inter se non sunt parallelæ: concurrunt cum media: neq; sunt ad mediam parallelæ.

Sed hoc impossibile.

Illud igitur necesse.

Sed melius demonstratur per secundum axioma, distantiæ æqualis additione.

Si æqualia æqualibus addantur, tota erunt æqualia. Axiom. 2.

At lineæ eidem parallelæ sunt in æquali distantia.

Lineæ igitur eidem parallelæ si addantur, æqualiter distabunt: itaque si extremæ à media binis pedibus distant, inter se 4 distant. Obserua hic 4 demonstrationes unius corollarij specialis, ex generali fonte deducti.

LIBER III. De Angulo.

Quid est Lineatum?

Est magnitudo plusquàm longa.

Quot sunt communes eius affectiones?

Duæ, Angulus & Figura. Vt enim communes affectiones magnitudinis sunt, terminari, secari, commensurari, congruere, adscribi: lineę uerò dirigi, obliquari, tangi, conuerti, torqueri, quæ omnia etiam in lineato insunt per lineam: sic lineati est angulari & figurari. Angulus porrò & figura in tota ratione Geometricarum rerum utramque ferè paginam faciunt.

Quid est angulus?

Est lineatum in communi sectione terminorum. Sic angulus superficiarius est superficies in communi sectione duarum linearum: sic angulus solidus est corpus in communi sectione trium minimùm super-

perficierum. Hæc definitio anguli eſt generalis ad planum & ſolidum: Euclides ſpecialiter utrumque definiuit.

Quomodo angulum planum?

Ἐπίπεδος γωνία ἐστιν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ, δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. 8.d.1.

Quot ſunt vitia in hac definitione?

Tria: primum eſt Grammaticum: Genitiuus enim *γραμμῶν* bis fruſtra iteratur: cætera duo ſunt Logica, contra legem *κατὰ παντὸς* & *καθ' αὑτό*. Nam primò,

Si definitio hæc *κατὰ παντὸς* eſſet, angulum omnem definiret.

At non omnem, ſed tantùm planum definit.

Non eſt ergo *κατὰ παντὸς*. Deinde.

Si inclinatio propria eſt anguli acuti, angulus non aptè per inclinationem *κλίσιν* definitur.

At illud, ut conſtat è 5.6.7.d.11.

Ergo & hoc.

Quomodo definit angulum ſolidum?

Στερεὰ γωνία ἐστὶν, ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν, πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. 11.d.11.

Quot ſunt hic vitia?

Duo. Primum eſt quòd itidem ſolidum angulum facit inclinationem terminorum. Deinde, quòd non ſatis aptè ſolidi terminos lineas facit. Nam

Si angulus eſt lineatum in communi ſectione terminorum, rectę quamlibet multæ corpus terminare non poſſunt.

At illud.

Ergo & hoc. Itaq; tanquam Euclidi dubia eſſet iſta definitio, aliter ibidem definitur.

Στερεὰ γωνία ἐστὶν, ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων. Hæc definitio uidetur paulò accuratior ſupe-

superiore, neque uidetur facere angulum inclinationem uel compræhensionem terminorum, sed quod compræhenditur à terminis & addit in uno puncto: ne totum lineatum angulus intelligatur. Sed non est accuratior ideò superiore. Nam,

Definitio definito angustior est uitiosa.

Hæc est angustior. Nam angulus non omnis est planus, id est, compræhensus à planis: sed quidam est sphæricus, quidam mistus: unde fieri non potest iste Euclidis angulus.

Est ergo uitiosa.

Quid sunt crura anguli, σκέλη?

Sunt termini compræhendẽtes angulum. Euclidi πλευραὶ latera.

Quot sunt consid. in cruribus?

Duo. Homogenia & Congruentia.

Quottuplex est Homogenia?

Duplex. Crurum & Concursus. Vnde anguli homogenei sunt anguli cruribus & crurum concursu genere ijdem. Sic anguli recti rectilinei sunt homogenei inter se: recti autem rectilinei rectis obliquilineis sunt heterogenei.

Quot sunt consid. in Congruentia?

Duo. Axiomata de angulorum æqualitate & inæqualitate: & Fabrica seu æquatio angulorum.

Quot sunt axiomata de æqualitate angulorum?

Tria. Vnum generale: duo specialia.

Quod nam est Generale?

Anguli cruribus congrui sunt ęquales.

Vnde est veritas huius axiomatis?

E congruentiæ axiomate, seu prima illa ἐφαρμόσεως luce: de qua 9. e. 1. Nam

Magnitudines, quarum partes appplicatæ partibus

tibus, æqualem locum occupant: sunt æquales.

At magnitudines congruæ æqualem locum occupant.

Magnitudines igitur congruæ sunt æquales.

Ex hac complexione ceu propositione assumendo:

At anguli cruribus congrui, sunt magnitudines congruæ.

Sunt igitur æquales.

Hinc apparet admirabilis facilitas Geometriæ Rameæ: in qua ex generalibus & communibus prępositis, postea specialia consectaria sine syllogismis deriuantur: ut hîc,

Magnitudines congruæ æqualem locum occupant:

Sunt igitur æquales: Ideoque

Anguli cruribus congrui sunt ęquales.

Et sic Proclus ad 4. p. 1. Angulus rectilineus rectilineo æquatur, quando crure altero alteri superposito reliquum reliquo congruit. Cùm reliquum crus cadit extra, angulus est maior extra cadentis cruris: cùm uerò cadit intra, minor: illic enim compræhendit, hic comprehenditur.

Est'ne reciprocum hoc axioma?

Non est: nam non sequitur, anguli ęquales, sunt cruribus congrui. Lunularis enim recto rectilineo ęquari potest, qui tamen non congruit.

Quomodo æquatur?

Additione communis anguli:

Anguli æquales communi additi, faciunt æquales.

At anguli semicirculorũ ęqualium sunt ęquales: quod ἐφαρμοσις ostendit. Nam magnitudines congrue sunt ęquales: at anguli semicirculorũ ęqualium sunt magnitudines congrue. Ergo sunt ęquales.

Anguli

Anguli igitur semicirculorum æqualium, communi additi faciunt æquales: ideoque lunularis recto æquatur.

Cur non congruit?

Quia est heterogeneus.

Quæ nam sunt specialia axiomata?

Primum est reciprocum: Si angulus angulo æquicrurus æquatur basi, est æqualis: & contra. ex 8. & 4. p. 1. Nam primò

Anguli cruribus congrui sunt æquales.
At anguli æquicruri, basi æquales, sunt cruribus congrui.
Sunt igitur æquales.

Deinde pro conuersa:

Anguli basi congrui, æquantur basi.
At anguli æquicruri ęquales, sunt basi congrui.
Aequantur igitur basi.

Secundum axioma est: Si æqualis basi est ęquicrurus, ęquatur: quod ex eadem congruentia est. Nam,

Anguli cruribus congrui, sunt æquales.
At æquales basi & æquicruri, sunt cruribus congrui.
Sunt igitur æquales.

Hæc secunda ęqualitas non est reciproca. Non enim sequitur: Si æqualis basi æquatur, est æquicrurus. Possunt enim in eodem semicirculo ęquales tres anguli esse, basi æquales, qui tamen non sunt æquicruri: ut in angulis in eadem sectione seu semicirculo apparet.

Quot sunt axiomata de inæqualitate angulorum?

Duo: Primum: Si angulus angulo æquicrurus, est maior basi: est maior, & contra. e 25. & 24. p. 1. Secundum: Si æqualis basi est minor interioribus cruribus, est maior. Euclides sic ait 21. p. 1. Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συ

σταθῶσιν: αἱ συσταθεῖσαι, τῶ τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν. Huius propositiónis duæ sunt partes: quarum primam demonstrant per 20.p.1. quia omnis trianguli duo latera reliquo maiora sunt. Sed melius est Archimedis principium: quia ambitus contenti trianguli, minor est ambitu continentis. Secundam partem demonstrant per 16. p.1. At hæc axiomate angulorum æqualium manifesta est. Nam

Si basis continentis est minor, est minor.

At si trianguli continentis latera contenti lateribus æqualia secentur; basis continentis erit minor.

Ideoq; & angulus erit minor.

Quæ nam est fabrica æquandi anguli?

Dato angulo æqualem facies, si crurum æqualiũ bases æquaueris: tum enim anguli cruribus congruent. è 23.p.1.& 26.p.11.

Quottuplex est angulus?

Duplex. Rectus & Obliquus.

Quid est Rectus?

Cuius crura inter se sunt recta. Itaq; anguli recticruri recti sunt æquales.

Cur addis recticruri?

Quia non omnes semicirculares recti omnibus semicircularibus rectis sunt æquales: & maioris semicirculi angulus maior est angulo minoris.

Est'ne hæc affectio reciproca?

Non est, non enim omnes anguli æquales sunt recti: possunt enim obliqui inter se æquari, & potest obliquus æquari recto, ut lunularis rectilineo.

Quid est obliquus?

Cuius crura inter se sunt obliqua. Estq; uel obtusus uel acutus. Obtusus maior recto. 11.d.1. Acutus minor recto. 12.d.1.

LIBER

LIBER IIII. De Figura.

Quid est Figura?

Est lineatum undique terminatum σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον. 14.d.1. περιέχεσθαι enim Euclidi est terminari undique & definiri: sicut & περιλαμβάνεσθαι. Euclides igitur figuratum & materiale, quantitatique connexum, figuram uocat, Posidonius autem Euclidem hic repræhendebat, definiendo figuram πέρας συγκλεῖον terminum cōcludentem: sed in elenchum incidit. Nam

Qui figuram à quantitate separat, elenchum facit.

At Posidonius figuram à quantitate separat. Respicit enim ad terminum extrinsecus circumpositum: cùm Euclides ad totum subiectum respiciat, dicatque circulum secundum totum planum, totamque exteriorem compræhensionem figuram esse.

Posidonius ergo elenchum facit.

Quot sunt partes figuræ?

Quinque. Centrum, Perimeter, Radius, Diameter, Altitudo.

Quid est Centrum?

Est punctum in figura medium. Hic Euclides contra legem καθόλου πρῶτον peccauit. Nam,

Qui generale specialiter definit, is in Aristotelis elenchum incidit.

At Euclides 16.d.1. & 16.d.11. centrum generale, specialiter & propriè rotundæ figuræ attribuit: sicut & Apollo: κέντρον ἀφ' οὗ πᾶσαι μέχρις αὐτοῦ ἴσαι εἰσίν.

Vterque igitur in Aristotelis elenchum incidit.

Quid est Perimeter?

Est compræhensio figuræ, περιοχή, περίληψις.

Quid est Radius?

Est recta à centro ad perimetrum. Platoni ἀκτὶν: Aristoteli in mechanicis ἡ γράφουσα τὸν κύκλον. Euclidi, quæ ex centro, dicitur.

Quid est Diameter?

Est recta inscripta figure per centrum. Dicitur autem etiam diagonius, quando terminatur oppositis angulis, ut in planis & rectilineis: & axis, ut in solidis.

Quomodo definit Euclides?

Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον. 16. d. 1. δίχα τέμνειν est bifariam. i. in duas æquales partes secare: cuius dichotomiæ causa est ipsa lineæ per centrum rectitudo. Nam

Linea recta per centrum, bisecat figuram.
At diameter est linea recta per centrum.
Bisecat igitur figurã. Hanc dichotomiam Thales demonstrauit. Nam
Si sectiones circuli per dimetientem sectæ, æquales non essent: altera maior esset, altera minor: & cum utraq; per centrum agatur, accideret à centro radios maioris sectionis maiores, minoris minores, æquales tamen esse.
At hoc impossibile.
Illud igitur necesse.

Sed hæc demonstratio Euclidi ridicula est. Nam,

Quæ demonstratio definitionem. i. principium demonstrat, & per impossibile demonstrat: est ridicula.
At hæc talis est.
Est ergo ridicula.

Quid hic Aristotelis interpretes mouerunt?

Si dimetiens secat bifariam circulum & dimetientes infinitæ sint: eueniet utiq; duplicia infinitorum infinita esse.

At il-

At illud.

Ergo & hoc.

Sed respondetur: magnitudinem infinitè quidem secari posse, actu tamen infinitas partes non habere.

Quæ nam sunt consectaria definitionis?

1. Diametri sunt in figura infinitæ.
2. Centrum figuræ est in diametro.
3. Centrum est in concursu diametrorum.

Quid est Altitudo?

Est perpēdicularis à uertice figurę ad basim. ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη. 4. d. 6.

Quottuplices sunt affectiones figuræ?

Duplices. Sunt enim aut unius aut duarum.

I. *Quot sunt affectiones unius figuræ?*

Tres. Ordinatio, Primatus, Ratio.

Quid est figura ordinata?

Est figura ęquitermina & æquiangula. Theoni τεταγμένον σχῆμα, Pappo τεταγμένον εὐτακτον, Campano regulare. Vt in planis triangulum ęquilaterum, quadratum, circulus: in solidis tetraëdrum, cubus, octaëdrum, dodecaëdrum, icosaëdrū.

Quid est figura prima?

Est figura in alias simpliciores figuras indiuidua. Sic in planis prima est triangulū, in solidis pyramis: ab illo omnia plana, ab hac omnia corpora oriūtur.

Quid est figura rationalis?

Quæ comprehenditur à basi & altitudine rationalibus inter se. Geometrica enim cōprehensio est interdū uelut in numeris multiplicatio. Itaq; si dederis basin & altitudinē rationales, tum numeris laterū multiplicatis explicabitur magnitudo figurę. Tales enim numeri significant figuras rationales explicabiles numero: & numeri multiplicati inter se facientes numeros, latera figurati numeri dicuntur. Figura itaq; rationalis fit duobus rationalibus lateri-

bus inter se multiplicatis: & tales figuræ sunt in planis parallelogrammum rectangulum, in solidis rectis prisma & cylindrus: unde reliquarū omnium figurarum ratio & mensura capitur. Numerus igitur figuræ rationalis figuratus dicatur: & numeri unde fit, latera figurati. Sic numerus planus quadratus: solidus, cubicus dicitur.

Sed nónne Geometria sui iuris est & tantum Geometricè tractabilis?

Est quidem, sed tamen parte quadam numeris associatur, & ijs explicatur, cùm scilicet magnitudines numeri fiunt. Arist. lib. 1. Post. cap. 7. οὐκ ἔστι τὴν ἀριθμητικὴν ἀπόδειξιν ἐφαρμόσαι ἐπὶ τὰ τοῖς μεγέθεσι συμβεβηκότα, εἰ μὴ τὰ μεγέθη ἀριθμοί εἰσι.

Sed nonne figuratus numerus est Arithmeticæ?

Hic decepti sunt Græci & Latini Mathematici omnes, qui figuratorum numerorū doctrinam Arithmeticæ attribuerunt: moti hoc argumento.

Si multiplicatio omnes figurarum affectiones explet: figuratorum numerorum doctrina arithmeticæ rectè tribuitur.

At multiplicatio omnes figurarum affectiones explet sine continuitate, sine cōtactu, sine angulo, sine situ. i. sine magnitudinis affectione.

Rectè igitur figuratorum numerorum doctrinæ arithmeticæ tribuitur.

Sed respondetur:

I. Multiplicatio arithmeticæ est unitatum.
At multiplicatio geometrica nō est unitatū.
Genesis igitur geometrica non est arithmeticæ.

II. Si omnes affectiones figurarum numeris explicarētur: rectè doctrina figuratorum numerorum arithmeticæ attribueretur.
Sed non illud. Neq; enim quadratum uel cubum arithmetica duplicare potest: quod utrumque

trumque tamen Geometria profitetur.
Ergo nec hoc.

III. In uera doctrina, corpus Geometriæ suis suis membris constare debet.
At si præcepta de planis & solidis numeris ad arithmeticam referuntur, corpus Geometriæ suis membris non constat.
Tum igitur non instituitur uera doctrina.

IIII. Vbi species præcedunt, genera sequuntur: ibi absurdum accidit.
At si numerorum figuratorum doctrina arithmeticæ tribuitur: species figuræ (planũ, quadratum, solidum, cubicum) in arithmetica præcedunt: genera (superficies & figura) in geometria sequuntur.
Si igitur numerorum figuratorum doctrina arithmeticæ tribuitur, absurditas sequitur.

V. In Arithmetica tractandum est, quod Arithmeticum usum habet.
At figuratus numerus extra Geometricas figuras nullum usum habet.
Figuratus igitur numerus in Arithmetica tractandus non est.

Obiectio.

Heterogenea non sunt miscenda.
At numeri sunt figuris heterogenei.
Numeri igitur figuris non sunt miscendi.

Responsio.

Superioris & altioris doctrinæ usus, in subalterna & inferiore doctrina non est heterogeneus.
At Arithmetica est superior & altior doctrina quàm geometria.
Arithmeticæ igitur usus in Geometria non est heterogeneus.

II. Quæ nam est affectio duarum figurarum?

Comparatio in ratione, proportione & similitudine. Horum axiomata sunt postulanda. Nam

Prima sui generis & antiquissima, sūt postulāda.
At horum axiomata sunt prima.
Sunt igitur postulanda & exemplis illustranda.

I. Vbi est Ratio?

In Isoperimetris. Figuræ autem isoperimetræ sunt figuræ æqualis perimetri. Sic triangulum perimetri 16 pedū est isoperimetrum triangulo 16 pedū, quadrato 16 pedum & circulo 16 pedū. Hic duplex falsa Mathematicorum definitio est. Prior, figuras isoperimetras esse, quæ intra eundem orbem inscriptæ sunt. Nam

Legitima definitio est, quæ non potest in aliam rem transferri.
At hæc potest in aliam rem transferri. Nam in eundem orbem possunt inscribi æqualis & inæqualis perimetri figuræ.
Hæc igitur non est legitima.

Posterior, figuras isoperimetras esse quarum anguli eundem ambitum capiunt. Nam

Legitima definitio debet esse reciproca.
At hæc non est reciproca. Nam triangulū quadratumq; eidem circulo inscripta capiunt illud tribus, hoc quatuor angulis eundē ambitum: neq; tamen sunt isoperimetra.
Hæc ergo non est legitima. Item,
Legitima definitio non est angustior definito.
At hæc est angustior. Nam circuli ipsi inter se ad talem definitionem nunquam essent isoperimetri.
Non est ergo legitima.

Quod nam ex isoperimetris est maius?

Ex isoperimetris homogeneis, ordinatius est maius. Sic triangulū æquilaterum maius est isoperimetro in-

tro inæquilatero: & æquicrurum uario. Sic in quadrangulis quadratum maius non quadrato: sic oblongũ ordinatius, est maius minus ordinato oblongo. Ex isoperimetris uerò heterogeneis ordinatis, terminatius est maius. Sic quadratũ est maius triangulo, & circulus quadrato: quia quadratum est πολυπλευρώτερον seu πολυγωνιώτερον triangulo & circulus quadrato. Sic in solidis icosaédrum maius est dodecaēdro:: quia est πολυεδρώτερον.

Quæ nam ex horum ignoratione orta est ψευδογραφία?

Isoperimetra esse æqualia. Hinc grodesia in agrorum dimensionibus fraudulēta: hinc geographia in regionibus & insulis mendax: hinc in rerũ mensuris fallacia. Metire isoperimetris mensuris altera cylindracea, altera cubica frumentum, longè inæqualem capacitatem reperies.

II. Vbi est proportio?

Est in primis figuris, ut in triangulo & pyramide: & argumēto proportionis pertinet etiam ad primarum multiplices, ut ad triangulatũ & pyramidatum.

Quottuplex est proportio primarum figurarum?

Duplex: Directa & Reciproca.

Vbi est Directa?

In æquealtis. Nam si figuræ primæ, sunt æquealtę, sunt ut bases: & contra. Hic 5 sunt consid. 1. ubi sit explicabilis & qua ex causa. 2. Fœcunditas. 3. Vsus. 4. Conuersio. 5. Consectarium.

Qua ex causa est explicabilis & vbi?

Causa est è logico proportionis axiomate æquemaiorum. Nam

Si numerus numeros multiplicet, facti sunt proportionales multiplicatis.

At in ęquealtis, eadē altitudo duas bases multiplicat: ut in duob. parallelogrāmis rectangulis eadē altitudo 4 duas bases 2 & 3 multiplicat.

In æquealtis igitur factæ figuræ sunt proportionales basibus:itaq; facta parallelogrāma 8.et 12 sunt proportionalia proportione sesquialtera. Nam

Vt 2 ad 3.sic 8 ad 12.

At 2 ad 3 sunt in sesquialtera proportione.

Ergo & 8 ad 12 sunt in sesquialtera.

Hæc tamen ęquealtarū proportio non est rationalis, nec explicabilis in primis ipsis figuris.sed tantū in earū quibusdā ęquemultiplicibus proportionalibus. Sic in planis parallelogramma sunt duplicia triangulorū 4 c.6.e.10.In solidis prismata sunt triplicia pyramidum.5.e.23. cylindri triplices conorum. 7.e. 27.

Quæ nam est fœcunditas huius axiomatis?

Ex eo oriuntur nouendecim propositiones Euclidis, ut Ramus hic ostēdit: Euclides specialiter de triangulis & parallelogrammis proposuit.1.p.6.

Quis est vsus huius axiomatis?

Hic est, quòd nihil intuendo spatia figurarum, è solis basibus ratio ipsarū ęqualitasq; uel inæqualitas poterit explicari.

Quæ nam est eius conuersio?

Figuræ primæ ut bases, sunt æquealtæ. Nam,

Si numerus numeros multiplicet, facti sunt proportionales multiplicatis.

At figuras primas ut bases numerus idem multiplicauit.

Figuræ igitur primæ ut bases,sunt æquealtæ.

Quod nam est consectarium huius axiomatis?

Si figurę primæ ęquealtæ sunt in basi ęquali, sunt ęquales.

Quæ nam est Reciproca proportio?

Si figuræ primæ sunt reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales:& contra. Hic consid.4.1.Reprehensio Euclidis.2. Vbi sit sit rationalis & qua ex causa. 3. Conuersio. 4. Differentia reciprocationis & similitudinis.

Quo-

Quomodo definit Euclides reciprocas figuras?

Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν. 2. d.6. Vbi notabile est Euclidi ἀντιπεπόνθησιν esse in figuris, quæ Aristoteli est ἀντιστροφὴ ἀναλογίας καὶ ἀναλογία ἀνάπαλιν.

Quottuplex est hic Euclidis reprehensio?

Duplex. Vna est obscuritatis. Sic enim clarius definiuntur, quando rationũ termini in utraq; figura, reciprocantur. Altera, quòd reciprocationẽ, quæ omninò res Arithmetica est (ut Aristot. lib. 5. Ethic. cap. 3. uult.) figuris propriè attribuit.

Vbi est rationalis & explicabilis hæc reciprocatio?

Non in figuris primis, sed in æquemultiplicibus primarum: & causa est ex lege aureæ regulæ. Nam

Si termini quatuor sunt proportionales, factæ ab ijs areæ sunt æquales.

At in reciprocis figuris bis bina. i. 4. latera sunt proportionalia.

In reciprocis igitur figuris, areæ factæ sunt æquales.

Assumptio patet in rectangulis parallelogrammis & solidis. Nam in illis,

Vt 3 ad 4, sic 6 ad 8.

At 3 ad 4 sunt in proportione sesquitertia.

Ergo & 6 ad 8 in eadem: ideoq; ipsa parallelogramma seu areæ sunt æquales. 24. & 24.

In his uerò,

Vt 24 (nam in solidis, basis sumitur pro duplici dimensione longitudinis & latitudinis) ad 18. ita 4. ad 3.

At 24 ad 18 sunt in proportione sesquitertia.

Ergo & 4 ad 3 sunt in eadem: ideoq; solida sunt æqualia. 72. & 72.

Quæ nam est conuersio?

Si figuræ primæ sunt æquales, sunt reciprocæ basi & altitudine. Nam,

Si areæ

Si areæ ſeu podiſmi ſunt æquales, termini quatuor ſunt proportionales.
At figurarum primarum areæ ſunt æquales, ut oſtendunt propoſita exempla.
Figurarum igitur primarum termini ſunt proportionales.

III. Quæ'nam eſt differentia inter reciprocationem & ſimilitudinem?

Reciprocatio requirit tantùm quatuor latera proportionalia: ſimilitudo uerò requirit omnes angulos ęquales & æqualium crura proportionalia. Deinde reciprocatio ſimplicior eſt & natura prior omninò arithmetica.

Quot ſunt conſid. in ſimilitudine figurarum?

Duo. Definitio & Comparatio.

Quid ſunt figuræ ſimiles?

Sunt figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum. Similitudo hæc eſt figurarum non modò primarum & à primis multiplicium, ſed omnino omnium: & duabus rebus comprehenditur, æqualitate angulorum & proportione crurum. Definitio Euclidis. 1.d.6.& alijs in locis toties & tam ſpecialiter diſcerpta, logica non eſt: genus enim unum eſt geometricæ ſimilitudinis: ideoq; generaliter definiendum, unde per ſpecies figurarum omnium intelligeretur. In rotundis enim laterũ loco erunt termini & diametri, in conis & cylindris axes & diametri baſium.

Quot ſunt conſectaria huius definitionis?

Quatuor: de homologia & ἐναλλαγῇ, de ſimili ſitu, de ſimilitudine inter ſe, de fabrica.

Quod'nam eſt primum?

Figuræ ſimiles habent homologos terminos æqualibus angulis ſubtenſos: & (quod Theonis lemma eſt) terminos æquales, ſi ipſæ ſint æquales. Nam
Figurę æquiangulę & proportionales cruribus

æqualium

æqualium angulorum, habent homólogos terminos, &c.

At figuræ similes sunt figuræ æquiangulæ, &c.

Figuræ igitur similes habent homologos terminos, &c.

Quid vocas homologos terminos?

E' sumptis proportionalibus primum & tertium, secundum & quartũ, id est alternos. Vt directè, sicut se habent 2 ad 3. ita 4 ad 6 nimirum proportione sesquialtera: item alternè, ut 2 ad 4. ita 3 ad 6 proportione dupla.

Quod'nam est secundum?

Figuræ similes similiter sitæ sunt, quando termini proportionales simili situ respondent: hoc est, cùm supera superis, infera inferis, & reliquæ loci differentiæ congruunt.

Quod'nam est tertium?

Figuræ eidem similes, sunt similes inter se. Nam,

Figuræ habentes eandem ęqualitatem in angulis & laterum proportionem inter se, sunt similes inter se.

At figuræ eidem similes habent eandem æqualitatem & proportionem inter se.

Figuræ igitur eidē similes, sunt inter se similes.

Quod'nam est quartum?

Si partibus datæ figurę partes ad datũ terminum similes similiterq; sitæ cōstituantur, figura constituetur similis datæ similiterq; sita.

Quæ'nam est comparatio figurarum similium?

Figuræ similes habent rationem homologorũ laterum æquemultiplicatam dimensionibus & medium proportionale una dimensione minus. Huius elementi duæ sunt partes.

Quæ'nam est prima?

Est de ratione homologorum laterum. Figurę planæ duarum sunt dimensionum, solidæ trium. Itaq;

habebunt illic duplicatam rationem homologorum laterum, hæ triplicatam. 18 & 19. p. 8.

Quæ nam est ratio planorum?

Vbi dimensio duplex est, ibi ratio duplicatur.
At in planis est dimensio duplex.
In planis igitur ratio duplicatur

Vt 8 & 18 sunt plani numeri similes, quorum ratio est subdupla subsesquiquarta ut 4 ad 9: quorum duplicata ratio est:

2. 2. (4 9 (2 $\frac{1}{4}$
3. 3. (9 4

Vel, ut 4 ad 6. quorũ etiam duplicata ratio est.

4. 4. (16 36 (2 $\frac{1}{4}$
6. 6. (36 16

Quæ nam est ratio solidorum?

Vbi dimensio triplex est, ibi ratio triplicatur.
At in solidis est dimensio triplex:
In solidis igitur ratio triplicatur.

Vt 60 & 480 solidi similes sunt, quorum ratio est octupla, ut 64 ad 512, quorum triplicata ratio est.

4. 4. 4. (64 512 (8
8. 8. 8. (512. 64

Vel. ut 27 ad 216.

3. 3. 3. (27 216 (8
6. 6. 6. (216 27

Vel, ut 125 ad 1000.

5. 5. 5. (125. 1000 (8.
10. 10. 10 (1000. 125

Quæ nam est secunda pars?

Est de medio proportionali. Nam inter duas similes figuras planas est una media proportionalis, inter duas solidas sunt duæ.

Quo-

Quomodo in planis?

Vbi duplicata eſt ratio numeri ad numerum, ibi unus intereſt proportionalis.

At in figuris planis eſt duplicata ratio: ut in 8 & 18.

In planis igitur intereſt unus proportionalis: qui efficitur è medijs uel extremis ſimilium figurarum lateribus: ut 12 è 2 & 6 uel è 3 & 4. medius inter 8 & 18.

2. 4. 3. 6.

Quomodo in ſolidis?

Vbi triplicata eſt ratio, ibi duplex intereſt proportionalis.

At in figuris ſolidis triplicata eſt ratio.

In ſolidis igitur duo interſunt proportionales. Vt 30 & 240 ſunt in octupla ratione & ſic latera eorum 3 & 6 triplicata:

3. 3. 3. (27 216 (8
6. 6. 6. (216 27

Medij autem per proportionem æquationis ordinatæ fiunt. Nam duorum illorum ſolidorum 30 & 240 latera ſecundum æquationem ordinatam proportionalia ſunt hæc:

5. 2. 3.
10. 4. 6.

Nunc ſolidus factus è lateribus ſecundo, tertio, quarto, hoc eſt, 2. 3. 10. erit primus medius. Factus autem è tertio, quarto, quinto, hoc eſt, 3. 10. 4. erit ſecundus

Quot conſectaria oriuntur è ſimilitudine figuræ?

Duo: 1. Si lineæ rectæ ſint continuè proportionales, una plures dimenſionibus figurarum ſimilium ad primam ſecundamq; ſimiliter ſitarum, ut prima recta eſt ad ultimam, ſic prima figura eſt ad ſecundam: & contra. 19 & 20 p. 6. 33. p. 11.

Explica

Explica numeris & primò in planis?

In planis si tres rectæ sint continuè proportionales, erit ut prima ad tertiã, sic rectilineum comparatũ primæ ad rectilineum comparatũ secundę, simile similiterq; situm. Ratio enim homologorum laterum duplicata est ratio quadrati primæ ad quadratum secundæ. Vt sunto tres lineæ 2.4.8. & ad primam secundamq; comparentur figurę similes pedum 6 & 24 (quod cognosces diuisis 6 per 2, & 24 per 4: nam quotus dabit alterum latus) sic nempe ut 2 & 4 sint bases earum. Iam,

Vt prima linea 2 est ad tertiam 8. sic prima figura 6 est ad secundam 24.

At prima linea est ad tertiam subquadrupla.

Ergo & prima figura est ad secundam subquadrupla.

Explica in solidis?

In solidis si 4 lineæ sint continuè proportionales, & duo similia solida comparentur ad primam & secundam: erit ut prima linea ad quartam, sic prima figura ad secundam. Sunto rursus 4 lineæ continuè proportionales. 1.2.4.8. & duo solida similia comparentur ad primam & secundam è lateribus 1.3.2. fit 6: & è lateribus.2.6.4. fit 48. Iam

Vt prima linea 1 est ad quartam 8: sic prima figura 6 est ad secundam 48.

At prima recta est ad ultimam suboctupla.

Prima igitur figura, est ad secundam suboctupla: quod patet diuisis 48 per 6.

Atq; in hoc consectario uia patet cuiuscunq; datæ figuræ duplicandæ, triplicandæ & data ratione augendæ. Vt enim prima recta erit ad ultimam, sic figura prima erit ad secundam.

Quomodo reprehendit Campanus Euclidem hîc?

Campanus ad 33.p.11. reprehendit Euclidẽ quòd speciali-

ſpecialiter proponeret de parallelepipedis, quę priſmatis & ſerratilibus conuenirent:

Qui attribuit ſolis parallelepidis, quæ priſmatis alijs natura prioribus conueniunt: is magnum errorem & multiplicem committit.

At Euclides cum alibi tum præcipuè 33.p.11.parallelepipedis tribuit, quæ priſmatis alijs cõueniunt.

Magnum ergo errorem committit.

Rectène Campanus?

Etſi Campanus caput altius extulerit quàm Euclides, ſummum tamen non attigit. Nec enim theoria hæc conuenit ſolis priſmatis pentaëdris (quę Campanus ſola putat) & Euclidis parallelepipedis, ſed omnibus omnino corporibus planis, quorũ duo plana oppoſita ſunt æqualia & ſimilia & parallela, reliqua autem latera parallelogramma: imò conuenit omnibus Euclideis corporibus: primis primum, deinde æquemultiplicibus primorum.

Quódnam eſt alterum conſectarium?

Si quatuor rectæ ſint proportionales, figuræ ſimiles ad eas ſimiliter ſitæ, ſunt proportionales: & contra. 22.p.6. & 37.p.11. Hic non exigitur continua proportio.

Quænam eſt cauſa proportionis huius?

In planis cauſa eſt ratio duplicata bis binarum figurarum: ut

1.1.	(1	4 (4		8	(4
2.2.	(4	1		2	
3.3.	(9	36 (4		24	(4
6.6.	(36	9		6	

In ſolidis cauſa eſt triplicata ratio bis binarum figurarum: ut

1.1.1.(1 2.2.2.(8	8 1 (8	48 6	(8
3.3.3.(27 6.6.6.(216	216 27 (8	240 30	(8

Quæ nam figuræ complent locum?

Quæ circa idem punctum quolibet mòdo collocatæ, nihil inane relinquunt. Nunc assumendo:

At in planis triangulum, quadratum, oblongum, sexangulum: in solidis pyramis, cubus, octaëdrum, circa idem punctum collocata, nihil inane relinquunt.

Complent igitur locum: Itaq; Aristotelis geometria lib. 3. de cœlo, cap. 8. non est accurata, quia solas figuras ordinatas ait locum complere, neq; omnes: sed tantum tres in planis, triangulum, quadratum, sexangulum: in solidis pyramidem & cubum. At

Si repletio loci iudicatur ex angulis rectis 4 in plano, 8 in solido: oblongum in plano: octaëdrum in solido complet locum.

At illud:

Ergo & hoc.

Item, Si figuræ coniunctis angulis efficiunt in plano rectos 4 uel in solido 8: complent locum.

At triangulum, quadratum, oblongum, sexangulum, in plano rectos 4: pyramis, cubus, octaëdrum in solido rectos 8 coniunctis angulis efficiunt.

Complent igitur locum.

Quid est figura rotunda?

Cuius radij omnes æquantur. Ideoq; diametri in rotundo bisecãtur radijs æqualibus: & rotunda diametrorum æqualium sunt æqualia. 1. d. 3. Sic æqualibus circulis insitum est, ut æqualem & radium & diametrum habeant, imò uerò æqualia radiorum & diametrorum quadrata. 2. p. 12. Aequalitas eadem è peri-

peripherijs sumi potest, æquales esse circulos quorū peripheriæ sunt æquales, quod in alijs figuris recti lineis falsum est: nec enim rectilinea sunt æqualia, quorum perimetri sunt æquales. Cōtrà circulorum inæqualitas percipitur, quorum nempe uel radij uel diametri uel peripheriæ sunt inæquales, uel à radijs & diametris inæqualia quadrata. Geometriç autem miracula è rotundis figuris præcipua sunt, circulusque omnium miraculorum principium est. Nam

Cuius causę mirabiles sunt, eius mirabiles sunt effectus.

At circulus habet mirabiles causas. Nam fit è recto, quamuis obliquus sit, fit è quieto, ut centri puncto, & moto, ut puncto extremo. Deinde conuexum in eo est & concauum: motus simplex in eo nullus est: sed idē antè, ponè, sursum, deorsum: secundum peripheriam naturaliter, secundum diametrum uiolenter mouetur.

Quare etiam effectus planè mirificos habet.

Motus item totus ex figura rotunda est. Nam

Acutus angulus est uelocitatis artifex.

At in rotundo subiectum planum tangente, angulus quouis acuto rectilineo minor acutiorq; est.

Rotundum igitur mobilissimum est omnium mobilium.

Atq; hactenus de affectionibus lineati: sequuntur eius species.

LIB. V. De Lineis & angulis in plano.

Quot sunt species lineati?

Duæ: Superficies & Corpus. Vnde Metrica diuisa

est in Geometriam & Stereometriam.

Quid est Superficies?

Est lineatum duntaxat latum. ἐπιφάνεια ἐστὶν ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. 5.d.1. Ἐπιφάνεια est quasi apparentia, quia magnitudinis nihil uisibile sit nisi superficies. Superficies autem latinis nõ est ipsa ἐπιφάνεια & extrema facies, sed quod super faciem ipsam: ut superficies ædium, quæ super aream est. Superficiei terminus est linea. 6.d.1.

Quottuplex est superficies?

Duplex: Plana & Gibba.

Quid est plana?

Quæ æqualiter intra suos terminos, hoc est, lineas, interiacet. 7. d. 1. ubi pro lineis ponuntur rectæ. At ueritas definitionis exigit extrema superficiei generaliter esse lineas: & circuli, spiralisq; spacij extrema sunt lineæ non rectæ. Euclides superficie plana usus est pro abaco, in eaq; contemplatur figuras planas & earum affectiones, sectiones, contactus, situs, angulorum constitutiones. Est autem plana superficies breuissima.

Nam, Quæ superficies æqualiter intra suos terminos interiacet: & cuius media extremis officiunt: est breuissima.
At talis est superficies plana.
Est ergo breuissima.

Item, Quæ superficies æquatur interuallo intra duas lineas, est breuissima.
At plana superficies æquatur interuallo intra duas lineas.
Est ergo breuissima.

Deniq, Quæ superficies per unicam rectam explorari potest quoquo uersus applicatã, est breuissima.
At plana superficies explorari ita potest.
Est ergo breuissima.

Quot

Quot sunt consid. in superficie plana?

Duo: Linea plana & Species.

Quot sunt in linea plana consid.

Duo: Postulata in fabricando, & Affectiones.

Quottuplicia sunt illa postulata?

Duplicia: Sunt enim uel de recta uel de obliqua.

Quot sunt de recta?

Duo. Vnum de recta ducenda: alterum de recta æquanda & æquali amputanda.

Quod nam est de recta ducenda?

A' puncto ad punctum licet rectam in plano ducere & producere. 1. & 2. post. 1.

Quid est postulatum, αἴτημα?

Est principium explicationis cuiusdã leuioris indigens, quo concedi postulatur aliquid εὐπετὲς, εὐπόριστον, εὐμήχανον, πρόχειρον facilè, parabile, obuiũ, promptum. Axioma autem est principium per se manifestum & clarum. Itaq; à Philopono αὐτόπιστον per se credibile dicitur: quodq; παρὰ τεχνίτου καὶ διδασκάλου ab artifice & magistro non capiatur. Proclus ait esse & ineruditis per se clarum & manifestum, rei factæ qualitatem declarans. Ideoq; uocatur αὐτόθι καταφανὲς, ἐνεργὲς, πρόχειρον τοῖς ἀδιδάκτοις. Differt autem à postulato, quòd postulatum fabricatur, axioma contemplatur. Propositio deniq; est Euclidi dubia & incerta sententia, quæ aliunde fidem suæ ueritatis & approbationem requirit. Proclus quinq; ait esse præter ipsam propositionem. ἔκθεσιν, διορισμὸν, κατασκευὰσιν, ἀπόδειξιν, συμπέρασμα.

Quot sunt consid. in primo postulato?

Tria: 1. Vbi proponẽda sit hæc fabrica. 2. quodnam sit instrumentum Geometricum ducendæ rectæ. 3. Continuatio rectæ.

Vbi proponenda est hæc fabrica?

Hoc postulatum iustum est duntaxat in plano. Nam,

Si fabrica lineæ rectæ generaliter superius proponenda fuit: sequitur ut in sphærico, conico & cylindraceo, recta intra duo quælibet puncta duci possit.

At hoc non licet: Neq; .n. in sphærico intra duo puncta rectam ducere licet: neque licet intra duo quælibet in conico & cylindraceo. A' uertice enim ad basim tantum licet: & tum plani secantis conum & cylindrum terminus est.

Non ergo superius generaliter, sed hîc in plano eius fabrica proponenda fuit.

Item: Per quam lineam, superficies plana & corpus planum rectitudinem suam metiuntur: in ea ius postulandi primarium est.

At illa, lineâ recta planâ rectitudinem suam metiuntur.

In rectâ igitur lineâ planâ ius postulandi primarium est.

Quodnam est instrumentum ducendæ rectæ?

Est amussis, quam Ptolemæus regulam uocat lib. 2. cap. 1. Musicæ.

Quænam est continuatio rectæ?

Hæc nihil aliud postulat, quàm prolongationem iam ductæ rectæ, & quidem à puncto ad punctum.

Quódnam est postulatum de æquanda & amputanda recta?

In plano licet rectam ponere ad datum punctum æqualem datæ & à maiore secare æqualem minori. 2. & 3. p. 1.

Quomodo efficitur opus prioris partis?

Promptè fit per applicationem datæ rectæ uel regulæ comparatione: per illa principia: quæ inter se conueniunt, æqualia sunt: & quæ eidem æqualia, in-

lia, inter se sunt æqualia. Nam,

Principijs uti licet:

At Euclides illa principia posuit lib. 1.

Licet igitur illis uti. Item,

Si Euclides his principijs & instrumẽtis utitur, licet & nobis uti.

At Euclides his principijs & instrumentis utitur. Sumit enim per illa radios æquales datæ rectæ, ductos regula, & sectos peripherijs, ope circini descriptos. E' lateribus enim infinitis amputat æquales radios.

Licet igitur & nobis uti. Nam,

Quæ causa, quæq; ueritas facit radios peripheriæ æquales, eadem faciet ad datum pũctum rectam æqualem datæ rectæ.

At radij ideò sunt æquales, quia rectæ duobus circini pedibus compræhensę sunt æquales.

Ergo & recta datæ rectæ est æqualis: quia utraque recta.

Obiectio.

Demõstratio facilis & è principijs proximè nõ deducta, reijcienda est.

At hęc est talis.

Ergo reijcienda.

Responsio.

Præpostera demonstratio est reijcienda.

At Euclidis demonstratio est prępostera, per peripherias. s. aut circulos.

Est ergo reijcienda.

Item, Aliena demonstratio est reijcienda.

At Euclidis demonstratio est aliena: Duo enim circuli facti sunt, ut duæ rectæ æquarent datã, sic ut recta rectę æqualis à dato pũcto inueniretur: primũ peripherię duę, tũ rectę duę, & duę productiones laterũ & peripherię rursus duę adhibentur. i. octo lineę pro una.

Euclidis igitur demonstratio est reijcienda.

Obiectio.

Quæ ad ingenium exercendū faciunt, non sunt reijcienda.

At ista faciunt ad ingenium exercendum.

Non igitur sunt reijcienda.

Responsio.

In sophisticis documētis ingenia non sunt exercenda.

At ista documenta sunt sophistica: quia præpostera & aliena.

In his igitur ingenia non sunt exercenda,

Quódnam est postulatum de obliqua linea?

In plano licet data recta peripheriam describere. 3. post. 1. Idq; fit dato centro & interuallo.

Quódnam est eius instrumentum?

Circinus. Nam ut longitudines regulâ, recti anguli perpendiculo & norma: ita peripheriæ & circuli circino & fiunt & dijudicantur.

Quódnam est corollarium huius postulati?

Radij eiusdem uel æqualis peripheriæ sunt æquales. Nam,

Vbi eadem recta est conuersa, ibi radij sunt æquales.

At in eadem uel ęquali peripheria, eadem recta est conuersa. c. 8. e. 2.

In eadem ergo uel æquali peripheria, radij sunt æquales.

Atq; hactenus de postulatis lineæ planæ: sequuntur eius affectiones.

Quot sunt eius affectiones?

Quatuor: Bisectio, Perpēdiculum, Parallelismus, Proportio.

I. Quottuplex est bisectio?

Duplex: Anguli & Rectæ.

Quæ-

Quánam est bisectio anguli?

Si duæ æquales peripheriæ à terminis æqualium crurum dati anguli rectilinei ante angulum concurrant, recta à concursu ad uerticem bisecabit angulũ. 9 p.1. Hic consid. sunt duo. 1. exemplum in Ramo: 2. demonstratio.

Quomodo demonstrat Theon?

Per 8.p.1. Nam,

Triangula inter se æquilatera sunt æqualia.
At hic duo sunt triangula inter se æquilatera.
Sunt igitur æqualia: ideoque angulus bisectus est.

Quomodo facilius demonstratur?

Per axioma æqualium angulorum. Nam,

Si angulus angulo æquicrurus, æquatur basi: est æqualis. per 1.c.6.e.3.
At hi duo anguli æquicruri ex thesi & communi latere æquantur basi. Sunt enim radij æqualium peripheriarum, per c.3. post.
Sunt igitur æquales & ideò angulus totus est bisectus.

Rectus autem secatur trifariam, si angulus æquilateri trianguli (qui ualet $\frac{2}{3}$. recti) sectus bifariã, statuatur ad angulum ipsum rectum. Nam reliquum erit $\frac{1}{3}$. Quod Vitellio docuit 28.p.1.

Quánam est bisectio rectæ?

Si duæ peripheriæ æquales à terminis datæ rectæ utrinq; concurrant, recta per concursus bisecabit datam. 10.p.1. Nam,

Bisecans angulum æqualium crurum, bisecat rectam.
At recta per concursum ducta, bisecat angulũ æquicrurum: ductis radijs æqualium peripheriarum: per 6.e. præcedens.
Recta igitur per concursum, bisecat rectã. Item,

 Si par-

Si partes datę rectę sunt æquales, data recta est bisecta.

At illud. Sunt enim æquales bases ęqualium & æquicrurorum angulorum. 1.c.6.e.3.

Ergo & hoc.

II. Quot sunt elementa de perpendiculo?

Tria: Quorum primum est de angulis? Si recta in rectam perpendicularis insistit, facit angulos deinceps rectos: & contra. Insistit autem recta in rectam, quæ secat nec secatur: & anguli sunt deinceps, quos insistens efficit cum subiecta & inter quos nullus est angulus.

Quot sunt hic consideranda?

Tria. Causa, Instrumentum, & Consectaria.

Quænam est causa angulorum rectorum?

Status rectæ ἀπαρέγκλιτος καὶ ἀῤῥεπὴς, non inclinatus, non propensus: hoc est crura recta. Nam,

Crura inter se recta faciunt angulos deinceps rectos. 8.e.3.

At recta in rectam insistens perpendiculariter, facit crura inter se recta.

Recta igitur in rectam perpendicularis insistẽs, facit angulos deinceps rectos.

Quottuplex est instrumentum perpendiculi?

Duplex. Norma & Perpendiculum.

Quid est Norma?

Est instrumentum ad lineam rectam rectè erigendam in eodem plano super rectam, atq; inde superficiem & corpus, super superficiem corpusúe. Winckelmeß.

Quid est perpendiculum?

Est instrumentum architectonicum è plumbo & filo, ideoque magis physicum: quia grauia suo pondere rectis lineis ad perpendiculũ ferantur. Bleiwag/ Senckel.

Quot-

Quottuplex est?

Duplex: Vnum ad explorandum perpendiculum ſublime: ut utrum columna uel ſtructura quæuis recta ſit ad planum horizōtis, nec quoquam acclinet. Alterum ad explorādum planiciem plano horizontis parallelam. Itaq; cum filum ab angulo recto in medium baſis inciderit, indicabit libratam longitudinem. Latinè libra & libella.

Quot ſunt conſectaria huius primi elementi?

Tria: Quorum primum eſt: Si recta inſiſtit in rectā, æquat deinceps angulos duobus rectis: & contra. 13 & 14. p. 1.

Quot ſunt hîc conſid.

Tria: Cauſa ſeu demonſtratio, Euclidis uerba & Conuerſio.

Quænam eſt cauſa?

Quia duo tales anguli eundem locum cum duobus rectis occupant, ex axiomate conueniētiæ. Nā,

Anguli cum duobus rectis eundem locum occupantes, æquantur duobus rectis.

At recta inſiſtens in rectam, facit angulos eundem cum duobus rectis locum occupantes.

Recta igitur inſiſtens in rectam, æquat angulos duobus rectis.

Quænam ſunt uerba Euclidis?

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ: ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. 13. p. 1.

Quid reprehendit hîc Proclus?

Admonet diſiunctionem non ſatis eleganter expoſitam, quia prima pars in ſecūda contineatur. Recti enim duo ſunt duobus rectis equales.

Quomodo demonſtrat Theon?

Per axioma, Quæ eidem æqualia, &c. Nam,

Tres particulares equantur duobus rectis.

At duo obliqui æquantur tribus particularibus.

Duo itaq; obliqui æquantur duobus rectis.

Quomodo demonstratur conuersio?

Euclides demonstrat per impossibile, ut solet ἀντίστροφα demonstrare : quia totum parti æquaretur. Nam,

Si recta æquans angulos duobus rectis non insistit in rectam: tum pars æquatur toti.

At hoc impossibile.

Illud igitur necesse.

Quódnam est secundum corollarium?

Si duæ intersecantur, æquant angulos ad uerticē, & omnes, quatuor rectis. 15.p.1. Anguli autem ad uerticem seu uerticales dicuntur, qui in eodem puncto uertices oppositos habenr. Habetq; hoc elementum duas partes.

Quænam est hîc demonstratio primæ partis?

Si intersectæ sunt perpendiculares, recti æquantur: sin obliquæ, uerticales etiam æquātur: & sic utrobiq; æquantur.

At intersectæ sunt aut perpendiculares aut obliquæ.

Ergo utrobiq; æquantur : ut in primo exemplo uerticales recti, in secūdo uerticales acuti & obtusi.

Estne prima pars reciproca?

Proclus eam conuertit, sed non rectè: quia non idem in consequente est, quod in antecedente ponitur. Sic enim ait:

Si duæ rectæ se mutuo secent, angulos ad uerticem æquales efficiunt.

Ergo si duæ rectæ angulos æquales ad uerticem faciunt, rectæ inter se erunt in rectam.

Conuersio connexi sic fuerat.

Ergo si duæ rectæ angulos ad uerticem æquales fa-

les faciant, se mutuo secabunt.

Sed non est reciprocum, duos angulos ad uerticem æquales esse & duas rectas mutuo secari. Nam,

Si hæc duo reciprocantur, anguli lunulares in duobus circulis se mutuo secantibus ad uerticem æquales, à rectis lineis erunt facti.

At non hoc.

Ergo & nec illud.

Nec omnes ad uerticem sunt æquales, ut patet in sectione circulorum.

Quænam est secunda pars huius elementi?

Est primum Euclidis corollarium, à Theone prætermissum, sed à Proclo positum: nimirum quatuor angulos duarum intersectarum, æquari quatuor rectis: & ait Proclus ex eo inuentum esse admirabile à Pythagoreis theorema, ordinatis figuris compleri locum.

Quódnam est Rami corollarium?

Quotlibet in communi puncto intersectarum angulos æquari quatuor rectis. Nam,

Quæ cum quatuor rectis eundem locum occupant, earum anguli æquantur 4 rectis.

At duæ rectæ, imo quotlibet rectæ in communi puncto intersectæ: cum 4 rectis eundem locum occupant.

Duæ igitur aut quotlibet rectæ intersectæ, æquant angulos 4 rectis.

Quódnam est tertium corollarium?

Si rectis recta sectis interiores eadem parte anguli sunt maiores duob; rectis, oppositi minores sunt. Atque hactenus de angulis perpendiculi: sequuntur duo elementa de duplici perpendiculi fabrica.

Quænam est prior fabrica?

Si à dato datæ rectæ infinitæ puncto duæ partes utrinque secentur æquales, & à punctis sectionum duæ æquales peripheriæ concurrant: recta à dato

pun-

puncto in concursum erit perpendicularis super datam.11.p.1.

Quænam est huius demonstratio?

Recta æqualiter interiacens est perpendicularis.10.e.2.

At recta à dato puncto in concursum æqualiter interiacet.

Est ergo perpendicularis.

Assumptio approbatur: quia est commune latus æquicrurorum & basi æqualium. Itaq;,

Commune latus æquicrurorum & basi æqualium, æqualiter interiacet.

At recta à dato puncto, est commune latus æquicrurorum & basi æqualium per 3.c.5.e.ideoq; æqualium, per 1.c.6.e.3.

Recta igitur illa ęqualibus angulis interiacet.

Quænam est altera fabrica?

Si pars datæ rectæ infinitæ secetur à peripheria à dato extra puncto, recta à dicto puncto bisecans dictam partem, erit perpendicularis supra datam.12.p.1.

Quænam est demonstratio?

Quæ prioris fabricæ demonstratio & quidem eadem de causa. Vt autem rectarum æqualitas postulata est 2.& 3.p.1.idq; per regulam & cõgruentiam, sic modo perpendiculum gnomonis iudicio postulari potuit. Neq; enim præsens perpendiculi fabrica ulli extra puluerem geometricum usui uidetur futura. Atque hæc de perdendiculo, sequitur parallelismus.

III. *Quódnam est elementum de parallelismo?*

Si duæ rectæ in eodem plano nusquam concurrunt, sunt parallelæ.35.d.1.

Quomodo demonstratur hoc elementum?

Ex causa parallelismi: perpetua. s. æquidistantia. Nam,

Perpe-

Perpetuo æquidistantes,sunt parallelæ.
At duæ rectæ iu eodem plano nusquam cōcurrentes,perpetuò æquidistant.
Duæ itaque rectæ in eod.plan.nūs.concur.sunt parallelæ.

Quódnam est consectarium huius elementi?

Si recta infinita secat alteram è rectis parallelis infinitis,secabit reliquam. Est principium Arist. lib.1. de cœlo.Nam,

Si recta infinita secans alteram è rectis parallelis,non secabit reliquam:erit ad eam parallela,per 11.e.ideoque & ad primam per c.11. e.2.
At hoc est contra thesim seu 11.e.concurrent enim.
Illud igitur necesse.

Quot sunt leges parallelismi?

Tres sunt:quas alij proprietates uocant:Proclus appellat triplex symptoma χαρακτηριστικὸν καὶ ἀντίστροφον.Parallelismus enim rectarum recta sectarum triplicem angulorum æqualitatem concludit,& ab earum qualibet uicissim concluditur. Vnde Ramus unum elementum ex tribus Euclidis propositionibus 29.28.27.p.1.fecit:Si rectæ recta sectæ sunt parallelę, æquant angulos interiores eadem parte duobus rectis,& inter se alternos,& exteriorem interiori opposito:& contra. Hic consid.sunt tria: 1 Ordo & demonstratio illarū proprietatum. 2 Elenchus. 3 Consectaria.

Quínam est ordo & quánam demonstratio?

Prima omnium proprietas est, interiores duobus rectis æquari:nempe è perpendiculo communi,quo parallelismus dijudicatur: atq; ex illa prima alterni, & exterior interiorq; concluduntur.

Quottuplex est demonstratio?

Duplex : Antecedentis & Conuersæ , in secante pri-

te primum recta, deinde obliqua.

Quomodo in secante recta?

Anguli recti sunt æquales.c.8.e.3.

At anguli in rectis recta sectis, sunt recti: ut interiores eadem parte, item alterni: item exterior & interior.

Anguli igitur in rectis recta sectis, sunt æquales: ideoq; æquantur interiores duobus rectis, & alterni inter se & exterior interiori opposito.

Quomodo in secante obliqua?

Si secans obliqua sit, parallelis idem ex contrario accidet. Obliquatione enim ista, manentibus rectis & immutatis, pariter tum interiorum alter obtunditur, alter acuitur: tum alterni acuuntur & obtunduntur: tum exterior interiorq; oppositi pariter obtunduntur & acuuntur.

Manéntne interiores æquales duobus rectis?

Manent. Nam,

Si interiores inæquales sunt duobus rectis: utraq; parte & maiores & minores duobus rectis erunt. Nam si ab una parte erunt maiores, anguli deinceps per 3.c.8.e. erunt minores: & econtrà de altera parte.

At hoc impossibile: est enim contradictio.

Illud igitur necesse.

Manentne eadem proprietates secundæ & tertiæ partis?

Manent: & utraq; ex prima concludi potest. Nam primò de alternis:

Aequales eisdem, æquantur inter se.

At bis bini sunt æquales duobus rectis, per superiorem partem & 1.c.8.e.

Bis igitur bini sunt æquales inter se. Nunc

Communi ab æqualibus sublato, reliqua sunt æqualia.

At

At a u y communis eſt angulus.
Is igitur ſublatus, reliquos alternos æquales relinquit ad u & y.
Secundò de exteriore & interiore. Nam
Eidem æquales, inter ſe ſunt æquales.
At exterior & interior, eidem æquantur u. y. i. per ſecundam proprietatem, quia ſunt alterni, & 2.c.8.e. quia ſunt uerticales.
Inter ſe igitur ſunt æquales.

Quæ nam eſt demonſtratio conuerſæ?

Conuerſæ prima pars de interioribus clara eſt ex illa communis propendiculi luce. Sed ſi interioribus angulis duos rectos æquantibus, rectæ tamen concurrere uideantur, dupliciter reſpondetur primò de angulis rectis æqualibus, deinde de obliquis æqualibus. Nam

1. Si interioribus angulis duos rectos æquantibus, rectæ concurrant: neceſſe eſt, ſi æquales ſint recti, duas rectas communi perpendiculo diuiſas, altera parte acclinare, altera declinare: uel ſaltem alteram.
At hoc contra 10.e.2.eſt.
Illud igitur falſum eſt.
2. Si interioribus angulis duos rectos æquantibus, rectæ concurrant: neceſſe eſt, ſi æquales ſint obliqui, lineis obliquatis angulos minui altera parte, altera augeri: ideoque duobus rectis æquales non eſſe.
At hoc contra theſin eſt.
Illud igitur falſum eſt.

Secunda pars per primam concluditur. Nam
Interioribus angulis duos rectos æquantibus, rectæ ſunt parallelæ.
At alterni ſunt æquales interioribus: quia utrique æquantur duobus rectis per 1.c.8.c.
Alterni igitur relinquunt parallelas.

D Ter-

Tertia concluditur per secundam. Nam,

Alterni relinquunt parallelas.

At exterior & interior oppositi æquantur alternis, per 2.c.8.e. quia exterior æquatur opposito ad uerticem.

Exterior igitur & interior relinquũt parallelas.

Quottuplex est hic Elenchus?

Duplex: Euclidis & Ptolemęi.

Quinam est Elenchus Euclidis?

Duplex est: Primus est quòd tres illas rectarum parallelarum proprietates confusius proposuit. Alter est quòd (ut Aeneas Hierapolita monuit) trium proprietatum unicam 27 p. reliquas duas 28. omnium autem conuersionem 29 compræhendisset.

Quinam est Elenchus Ptolemæi?

Is tertiam apud Euclidem proprietatem & eius conuersam ex undecimo axiomate demonstrat. Antecedens ita:

Si duo interiores duobus rectis sint æquales, nec tamen sectæ parallelæ sint: concurrent utrinque: & sic duæ rectę superficiem concluderent.

At hoc impossibile.

Illud igitur necesse.

Conuersam autem ita:

Si recta in parallelas cadens faciat interiores inequales duobus rectis, faciet maiores aut minores.

At neutrum potest. Nam si faciat maiores prima parte, secunda faciet minores: quia quatuor interiores sunt æquales 4 rectis per 13. p. 1. Et contrà, secunda parte dices similiter etiam fieri duobus rectis maiores: quia sint inter easdem parallelas: ita fieret, ut ijdem duobus rectis maiores essent & minores.

Quare si recta rectas parallelas secuerit, faciet inte-

interiores eadem parte duobus rectis æquales.

Sed Proclus argutatur Ptolemæum in demonstratione conuersę abuti & argumento & argumentatione: quia diuisio illa sit imperfecta: neque quæstionem concludat. Sed Proclus captiosè uidetur agere. Nam & diuisio plena est inęquale maius aut minus esse, & impossibile deinde Logico syllogismo concluditur. Sed tamen in hoc non satis Logicus est, quòd è causa quidem facit ἀντίστροφον propositionis, ex effectu autem antecedens. Nam parallelæ sectę, tales angulos faciunt. Illic igitur est causa, hic effectus. Deinde demonstratio Ptolemęi & si uera, causam tamen nullam ostendit, sed tantùm per impossibile, id est, ut Proclus ait, per accidens demonstrat. Itaque si Ptolemęus causam è rectis perpendiculorum angulis spectasset, principium fecisset, neq; demonstrationem eiusmodi quæsisset.

Quot sunt consectaria 12 elementi?

Sex. I. Si rectę recta connexæ faciunt interiores angulos eadem parte minores duobus rectis, eodem continuatæ concurrent. axiom. 11. Demonstratio est ex 12. e.

Si rectæ recta sunt parallelæ, faciunt angulos interiores eadem parte æquales duobus rectis.

At in proposito exemplo, faciunt angulos minores.

Rectæ igitur in proposito exemplo non sunt parallelæ: ideoq; concurrent.

Quis est hic Euclidis Elenchus?

Ptolemæus, Geminus & Proclus reprehendunt Euclidem, quòd ex theoremate demonstrabili, fecerit principium indemonstrabile. Nam, primò,

Principum indemōstrabile à causa ad effectum deducitur.

At hoc non à causa ad effectum: sed econtrà deducitur: nec enim anguli minores non parallelas concurrentes faciunt: sed non parallelæ concurrentes, tales angulos faciunt.

Hoc igitur principium est demonstrabile: ideoque nos tanquam assumptionem & complexionem, è 12. e. tanquam propositione deduximus.

Deinde:

Cuius sententiæ conuersa est demonstrabilis: ipsa etiam est demonstrabilis.

At axiomatis 11 conuersa est demonstrata ab Euclide, 17.p.1.

Axioma igitur 11 est demonstrabile.

II. Recta connectens rectas parallelas est in eorum plano. 7.p.11. Nam

Recta una duęque intersectę sunt in eodem plano. 2.c.5.e.

At recta connectens rectas parallelas, est una recta duęq; intersectę.

Recta igitur connectens rectas est in eorum plano.

III. Si recta à dato puncto cum data faciat angulum, anguli facto æquati & alterni crus alterum erit parallelum datę rectæ: 31.p.1. Potest igitur parallela fieri ex angulo alterno æquali: potest autem angulus etiam ęquari erecto perpendiculo (ut architecti uulgò ęquant) item per exteriorem: denique inuariato circino potest parallela fieri è peripherijs duabus.

IIII. Anguli crurum alternè parallelarum sunt ęquales. Nam

Rectę quæ faciunt interiorem exteriori opposito æqualem, habent inter se angulos æquales.

At crura alternè parallelarum: faciunt interiorem

rem exteriori opposito ęqualem: ut apparet altero crure continuato.

Crura igitur alternè parallelarum, habent inter se angulos æquales.

V. Si parellelæ conterminent parallelas, oppositæ ęquantur.è 34.p.1.siue sint perpendiculares siue obliquæ.

VI. Si rectę conterminent eadem parte ęquales & parallelas, sunt ęquales & parallelę. 33. p.1. Nam quod ad utrumque, id est, ęqualitatem & parallelismum attinet: per proximum consectarium,

In parallelis conterminantibus parallelas, opposite æquantur.

At rectę conterminantes eadem parte ęquales & parallelas, sunt oppositę.

Sunt igitur ęquales & parallelę.

Quod autem separatim ad primum attinet. i. ad æqualitatem.

Bases æqualium angulorum & cruribus ęqualium, sunt ęquales. 1.c.6.e.3.

At rectæ conterminantes eadem parte ęquales & parallelas, sunt bases æqualium angulorum & cruribus ęqualium: nam primò recta in parallelas incidens, per 12.e. facit angulos alternos ęquales: deinde crura æquantur per thesim & incidentem communem.

Rectę igitur illę sunt ęquales.

Quod uerò ad parallelismum attinet,

Rectæ sectę per rectam facientes æquales angulos alternos, sunt parallelę.

At rectę conterminantes eadem parte ęquales & parallelas, sunt rectę sectæ, &c.

Rectę igitur illę sunt parallelę.

Quare dicis, eadem parte?

Ne oppositis terminis connexas rectas quis intelligat. Nam dimetientes duę possunt diuersis parti-

bus ęquales simul & parallelas coniungere: neq; tamen parallelæ erunt.

IIII. *Quod'nam est elementum de proportione?*

Si lineę rectę parallelis pluribus rectis intersecantur, intersegmenta sunt proportionalia. è 2. p. 6. & 17.p.11.

Quæ'nam est causa huius elementi?

Hoc elementum ueritatis suę causam ostendit ex ipso parallelismo in intersectis tam perpendicularibus, quàm annuentibus. Nam si intersectæ sunt perpendiculares, segmenta intra duas parallelas ęquantur. Nam,

Segmenta communi perpendiculo diuisa, sunt æqualia.
At segmenta intra duas parallelas, communi perpendiculo diuiduntur.
Sunt igitur æqualia.

Quod si intersectę annuant, non iam segmenta quidem illa bina æqualia sunt, sunt tamen proportionalia: quantoq; maior intersecta fuerit, tantò maiora erunt ipsius intersegmenta, quantò minor tantò minora.

Quæ'nam ex hoc elemento consequuntur?

Sectio lineę secundum datam rationem, & inuentio tertiæ & quartę proportionalis.

Quæ'nam est sectio lineæ secundum datam rationem?

Si recta contermina cum data faciens angulum secetur data ratione, parallelę à segmentorum terminis in finem datę & contingens in ea punctum, secabunt datam data ratione. Hoc consectarium est generale ad omnem datæ rectę sectionem siue bifariam, siue trifariam, siue quotlibetfariam secanda sit. Itaque si contermina bifariam sit secta, ductæ paral-

parallelis data etiam bifariam ſecabitur. Nam

Si lineæ rectę parallelis pluribus rectis interſecantur, interſegmenta ſunt proportionalia.

At contermina & data ſunt lineæ rectæ parallelis pluribus rectis interſectæ.

Conterminæ igitur & datæ interſegmenta ſunt proportionalia: ideoque data datâ ratione ſecta eſt. Itaque

Vt prima pars conterminæ ad ſecundam: ſic prima datæ ad ſecundam.

At prima & ſecunda conterminæ bifariam ſectę, ſunt dimidiæ partes.

Prima igitur & ſecunda datæ, ſunt ętiam dimidiæ.

Quod ſi trifariam contermina ſecta ſit, trifariam & data ſecabitur: ex priore ſyllogiſmo: quia ſunt inter parallelas interſegmenta. Itaque

Vt prima pars conterminæ ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam: ita prima datæ ad ſecundam & ſecunda ad tertiam.

At prima pars conterminæ eſt ad ſecundam dimidia, ſecundaq́; dimidia ad tertiam.

Prima igitur datæ eſt dimidia ad ſecundam, ſecundaq́; ad tertiam.

Quænam eſt inuentio tertiæ proportionalis?

Si duæ datę rectæ facientes angulum continuentur, prima æqualiter ſecundę, ſecunda infinitę: parallelæ à terminis primæ continuationis in principium ſecundæ, & contingens in ea punctum interſecabunt tertiam proportionalem. 11.p.6.

Quænam eſt inuentio quartæ?

Si è datis tribus rectis prima tertiaque facientes angulum continuentur, prima æqualiter ſecundæ-

tertia infinitè: parallelæ à terminis primæ continuationis in principium ſecundæ & cõtingens in ea punctum, interſecabunt quartam proportionalem. 12. p. 6.

LIBER VI. De Triangulo.

Hactenus de lineis planis, nunc de figuris planis: in quibus 3 conſid. Primò Conſectarium commune. è 15. e. 4. Secundò Genera. Tertiò Aſcriptio.

Quod'nam eſt conſectarium?

Plana ſimilia habent duplicatam rationem homologorum laterum & unum proportionale medium. è 20. p. 6. 11. & 18. p. 1. Nam

Figuræ ſimiles habent rationem laterum æquemultiplicatam dimenſionibus, &c. 15. e. 4.
At plana ſimilia ſunt figuræ ſimiles.
Plana igitur ſimilia habent rationem æquemultiplicatam, &c.

Quot ſunt genera plani?

Planum eſt rectilineum aut obliquilineum. Rectilineum quod compræhenditur à lineis rectis. 9. & 20. d. 1. Rectilineum æquat angulos rectis, interiores quidem generatim à binario paribus, externos autem quaternis, ut hic uides 2. 4. 6. 8. 10. 12.
3. 4. 5. 6. 7. 8.

Quottuplex eſt Rectilineum?

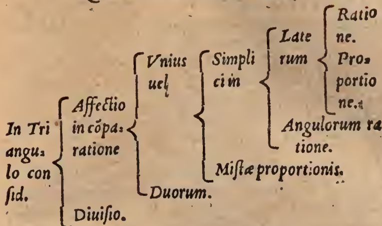
Duplex: Triangulum aut triangulatum.

Quid eſt Triangulum?

Eſt quod compræhenditur à tribus lineis rectis. 21. d. 1. Itaque triangulum eſt prima figura rectilineorum. axio. 12. Et ſi recta infinita ſecat angulum, ſecat baſin. Vitell. 29. th. 1.

Quæ'nam

Quæ nam sunt consid. in Triangulo?



Quæ nam est ratio laterum trianguli?

Trianguli duo quælibet latera sunt maiora reliquo. παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. 20. p. 1.

Quæ nam est eius demonstratio?

Ex rectæ lineæ definitione. Nam

Recta inter duo puncta est breuissima. c. 5. e. 2.

At tertium trianguli latus est recta inter duo puncta.

Tertium igitur seu reliquum latus est breuissimum.

Quæ nam est Euclidis demonstratio?

Est præpostera per 5. & 19. p. 1. Itaque Epicureis materiam irridendi sui præbuit. Hinc obiectio Sidonij Zenonis:

Qui demonstrat quæ uel asinis & araneis & canibus manifesta sunt: ridiculus est.

At Euclides cùm demonstrat. 20. p. 1. demonstrat quæ asinis, araneis, canibus manifesta sunt. Natura siquidem agit in omnibus secundum breuiores lineas.

Euclides igitur ridiculus est.

Sed Proclus sic soluit:

Qui scientificas rationes, non sensuum iudiciũ sequitur: ridiculus non est.

At Euclides scientificas rationes sequitur.

Euclides igitur ridiculus non est.

Quot sunt hîc consectaria?

Duo, de fabrica trianguli primò in genere, deinde in specie æquilateri.

Quod nam est primum?

Si tres rectæ sint, duæ quælibet maiores reliqua: peripherięque à terminis unius interuallis reliquarum concurrant: radij à concursu ad dictos terminos constituent triangulum. 22. p. 1.

Quod nam est secundum?

Si duæ æquales peripheriæ à terminis datæ rectæ eiusq; interuallo concurrant: rectæ à concursu ad dictos terminos constituent triangulum ęquilaterum super datam. 1. p. 1.

Quot nam in hoc speciali consectario repræhendi possint?

Quatuor. Demonstratio, Hysterologia, Inutilitas, & Tautologia.

Quæ nam est demonstratio?

Proclus putat hîc demonstrationem ex causa esse. Nam

Vbi duæ rectæ datam æquantes, ipsæ sibi conterminæ quæruntur & inuentæ sunt peripheriarum auxilio, in quibus radij compræhensi illæ ipsæ rectæ sunt quæ quærebantur, & peripheriarum concursus, ipsorum concursus est: ibi causa est.

At in triangulo æquilatero duæ rectæ inuentæ sunt peripheriarum auxilio.

Hîc igitur causa est.

At respondetur:

In de-

In demonſtratione legitima, requiritur cauſa propria.

At hic cauſa trianguli æquilateri non eſt propria : ſed generalis omnis trianguli.

Hic igitur non eſt demonſtratio legitima. Item.

In legitima demonſtratione dicitur proprium adiunctum de proprio ſubiecto.

At triangulum æquilaterum, non eſt proprium adiunctum datæ rectæ.

Hic igitur non eſt legitima demonſtratio.

Duo autem reliqua latera ęqualia multò promptius inueniuntur applicatione datæ rectæ uel comparatione regulæ, per illa principia, Quæ inter ſe conueniunt. Et, Quæ eidem æqualia.

Quæ nam eſt Hyſterologia?

Quia 1.p.1.fecit, quæ tanquam ſpeciale conſectarium.è 22.p.1. ſequitur.

Quæ nam eſt inutilitas?

Fabrica hæc διαγραμμάτων ſcholaſticorum tantum cauſa uidetur inuenta, non ad uſum quenquam geometricum extra ſcholaſticum puluerem. Nam arbores in ſyluis quærendę ſunt, unde triangula moles machinanda ſit. Proclus tamen fabricam æquilateri propoſitam ait, quòd inde fiant mundanæ figuræ, icoſaëdrum, octaëdrum, pyramis: de quibus Ram. lib.29.ſcholarum, in fine.

Quæ nam eſt Tautologia?

Quia idẽ ſæpius inutiliter iteratur, quod præpoſito genere ſemel explicari ſatis erat. Proclus addit etiam fabricam æquicruri & uarij : triaque problemata pro uno 22.p. 1.problemate facit. Aequicrurum autem ſuper datam conſtituitur ſemel aucto uel minuto circini interuallo : ut uarium utrinque uariato.

Quæ nam

Quæ nam est proportio laterum?

Si recta in triangulo est parallela basi, secat crura proportionaliter.& contra.2.p.6.

Quæ nam est eius demonstratio?

Si in triangulo intersegmenta sunt proportionalia, crura secta sũt proportionaliter.13.e.5.
At si recta in triangulo est parallela basi, trianli intersegmenta sunt proportionalia.
Si igitur recta est parallela basi, crura secat proportionaliter.

Theon uarijs triangulis colligit: unde sequitur, Si latera trianguli æquilateri bisecta connectantur, quadrisecabunt triangulum in quatuor triangula æquilatera. Nam,

In parallelogrammo opposita æquantur.
At in triangulo æquilatero in quatuor triangula secto: sunt tria parallelogramma
In eo igitur opposita æquantur. Iam,
Oppositis æquale, est extremis æquale.
At medium æquilaterum est oppositis æquale.
Est ergo etiam extremis æquale.

Quæ nam est demonstratio conuersæ?

Illa cogitur per antecedentem. Nam,

Si recta secans crura proportionaliter, non est parallela basi: totum minus est parte. Nam si prima pars esset minor tertia, secunda esset minor quarta, totum parte.
At hoc impossibile.
Illud ergo necesse.

Quæ nam est angulorum ratio?

Trianguli tres anguli sunt æquales duobus rectis.32.p.1.

Quot sunt consid. in hoc elemento?

Tria: Veritas, Commentũ Aristotelis & Cõsectaria.

Vnde est veritas seu causa eius?

Est ex angulo recto eoq; imminuto. Nam (ut Proclus

clus ait) ueritas huius propoſitionis ſecundum communes notitias apparet duobus perpendiculis ad baſin erectis. Nam,

I. In qua figura tantũ ad uerticem aſſumitur, quantum inclinatione ex angulis rectis ad baſin imminuitur: ibi duorum rectorum æqualitas iſta compenſatione conſtruitur.

At in triangulo tantum aſſumitur ad uerticem, quantum inclinationis nutu imminuitur ex rectis angulis ad baſin. Duę enim tertiæ recti ex utraq; baſi aſſumuntur.

In triangulo igitur duorum rectorum æqualitas iſta compenſatione conſtruitur.

II. Per rectã in uertice, baſi parallelam, alterni anguli protinus æqualitatem oſtendunt. Nam

Tres particulares ęquãtur duob. rectis. 1.c.8.e.5.

At interiores æquantur tribus particularibus. Vnus ſibijpſi, reliqui alternis, per 12.e.5.

Interiores igitur æquantur duobus rectis.

III. Quærit Ariſtoteles 9 Metaphyſ. cur duo recti ſint in triangulo? reſpondetq; quòd ad unum punctum anguli ſunt ęquales duobus rectis. διὰ τί δύο ὀρθαὶ τὸ τρίγωνον; ὅτι αἱ περὶ μίαν στιγμὴν γωνίαι ἴσαι δύο ὀρθαῖς: quod Euclides 32.p.1. ſecutus eſt. Nam,

Aequalia duorum rectorum æquali, duobus ipſis rectis æqualia ſunt. Nam quæ eidem æqualia, inter ſe ſunt æqualia. Axiom. 1.

At trianguli tres anguli ſunt æquales duorum rectorum æquali. Nam in ſchemate 32.p.1. exterior angulus & interior contiguus, duobus rectis ſunt æquales. per 13.p.1. Et ijſdem exteriori & interiori æquales ſunt tres interiores anguli: contiguus nempe interior ſibijpſi, reliqui exteriori, per 32.p.1.

Quare trianguli tres anguli ſunt æquales duobus rectis.

Quod-

Quod nam est Aristotelis commentum?

Hæc propositio locis infinitis Aristoteli proposita est & uidetur ille propositionis huius argumento apodicticam analysin commentus esse ad demonstrandum affectionem propriam (ut hominis est facultas risus) de suo subiecto per causam propriam. Sed falsò. Nam,

Si interiores angulos duobus rectis æquari, est proprium trianguli & per propriam causam ab Aristotele conclusum: uerum exemplum fuit ex quo Aristoteles artem demonstrationis extrueret.

At utrumq; illud falsum est: ut duplex elenchus demonstrabit.

Hoc igitur etiam falsum est.

Quis est prior elenchus?

Si interiores angulos duobus rectis æquales habere, adiunctum proprium est trianguli: id nulli alij subiecto tribui potest.

At alijs tribui potest, ut figuræ non trilateræ, quinquangulo è continuatis ordinati quinquanguli lateribus facto, & duabus rectis in tertiam coinsistentibus.

Non est ergo proprium trianguli.

Quomodo id conuenit figuræ non trilatræ?

In figura quatuor peripheriarum: quę si rectas deleas, duos angulos habebit æquales duobus rectis.

Quomodo in quinquangulo?

Quia quinquangulum illud ęquat quinq; interiores duobus rectis. Nam,

Tres æquant duos rectos. 9. e. 6.

At quinq; interiores æquantur tribus æquantibus duos rectos: Nam 4 interiores o.e. & i.u. æquantur uni & eidem exteriori, a.s.y. qui sibijpsi quoq; æquatur.

Quinq; igitur interiores ęquantur duob. rectis.

Quo-

Quomodo in duabus rectis?

Si æqualitas trium angulorum duobus æqualium in coinsistentibus in tertiam sine triangulo reperitur: imò inde ad triangulum deducitur: æqualitas ista non est propria trianguli.

At illud. Nam si duæ rectæ ad idem punctum in tertiam coincidant, facient tres angulos æquales duobus rectis.

Ergo & hoc.

Tu uerò ut superiora illa nihil essent, attamen æquare tres angulos duobus rectis non ita proprium trianguli fuerit, ut hominis γελαστικόν. Nam,

Γελαστικὸν ipsum, & similia, consideratur in subiecto solo nec usquam comparato, & in eo sic actu inest.

At æqualitas trium cū duobus rectis non est actu in uno triangulo solitario: neq; duo recti in uno triangulo possunt esse: idque meritò in Metaphysicis inter Geometricas potentias connumeratur. 9. c. 9. l. Sed inest affectio per comparationem externorum.

Quare tres æquari duobus, nō est affectio propria trianguli ut hominis est potestas risus: falsumq; exemplū Aristoteles sibi proposuit.

Quis est alter elenchus?

Si maximè uerum, maximeq; proprium esset trianguli rectilinei tres interiores æquare duobus rectis: tamen demonstrationē affectionis propriæ de subiecto per causam propriam in hoc exemplo non reperiret: imò nullam omninò reperiret. Nam,

I. Comparatio æqualium è generali & multorum præterea subiectorum communi principio, id est, è 13. & 29. p. 1: non est propria causa triangularis affectionis.

At demōstratio ista Aristotelis, est talis cōparatio.

Non

Non igitur est propria causa.

II. Si in hoc argumento causa est, est aut efficiens, aut materia, aut forma, aut finis.

At nec efficiens, nec materia, nec forma, nec finis est, sed tantùm comparatio parium.

Nulla igitur causa est, nedum propria.

Quare legitima occasio Aristoteli hinc esse nulla potuit demonstrationis comminiscendæ, qua propria affectio de subiecto per causam propriam syllogismo concluderetur, neque ex ullo uniuersæ matheseos; imò cuiusquam disciplinæ elemento esse potuit. Nullum enim est usquam in totis disciplinis exemplum tam monstrosi commenti: imò propria affectio (ut in homine potentia risus) per se, nulla alia intercedente causa inest: ut horribile sit cogitare tanto philosopho in mentem uenisse artis permagnæ speciem prodere, cuius exemplum nullum unquam ipse neque animaduertisset, neque per naturam animaduertere posset: & mirabile maximè, maximeque miserandum sit innumerabilia tot seculis ingenia fuco Aristotelei nominis tam turpiter decepta esse. Ingenium igitur Aristotelis hic laudamus, quòd elementi huius geometriam tantoperè celebrarit: quòd autem exemplum commentitiæ demonstrationis hinc arripuerit, suaque & consequentia posteritatis tempora tam portentosa cacotechnia deceperit, laudare non possumus.

Quænam sunt consectaria huius elementi?

1. Tres ab eodem puncto rectæ in datam rectam sunt inæquales.
2. Angulus æquilateri desectus è recto & bisectus, trisecat rectum.
4. Si perpendicularis in æquilatero est à uertice, desecat triangulum uarium uno angulo recto, altero besse, reliquo triente recti.

4. Si ba-

4. Si basis recti est dupla cruris, angulus utriusque (basis & cruris) est duplus acuti reliqui.

Sunt & alia tria Euclidis.

Quódnam est primum?

Trianguli duo quilibet anguli sunt minores duobus rectis. παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 17. p. 1.

Quǽnam est eius demonstratio?

Est è proximo elemento generali. Nam tres anguli sunt æquales, duo ergo sunt minores.

Quomodo demonstrat Euclides?

Demonstratio Euclidis ex 16. & 10. p. 1. assumpta est: qua interiorum angulorũ ratio per exteriorem probatur.

Quomodo id reprehendit Proclus?

Accidens non necessarium, necessaria affectionis causa esse non potest.

At productum trianguli latus est accidens non necessarium: duos interiores duobus rectis minores esse, affectio triãguli necessaria est.

Productum igitur latus non potest huius affectionis causa esse: itaq; potest illud idem sine producto latere demonstrari.

Quomodo igitur demonstrat Proclus?

Si à uertice trianguli recta ducatur in basim, ambo deinceps anguli duobus rectis sunt æquales: & tamen cum sit uterq; exterior interiore & opposito, maior, ambo etiam iisdem oppositis maiores erunt. Sed nec ista demonstratio legitima est, quia causam non habet. Proclus autem idem multò uerius causam inæqualitatis huius repetit ex inequali laterum inclinatione & distantia, id est, ex axiomate æqualiũ angulorum: ut si erigantur ex angulis trianguli perpendicula, rectorum excessus manifestissimus sit: atque ista nimirum per undecimi axiomatis conuersam ratio p rompta sit. Axioma est: Si rectæ rectá con

nexæ faciunt angulos interiores duobus rectis minores, concurrent: cuius ἀντίστροφον est. Si rectæ concurrant, connexæ recta, facient angulos interiores minores duobus rectis. Iam,

> Si rectæ recta connexę concurrunt, duo quilibet ad basim anguli minores sunt duobus rectis.
>
> At in triangulo rectæ, quæ sunt latera, recta connexæ, concurrunt.
>
> In triangulo igitur duo quilibet ad basim anguli minores sunt duobus rectis.

Quódnam est secundum Euclidis consectarium?

Cōtinuato latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppositis. Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί.32.p.1. Nam,

> In triangulo sunt duo recti, tribus angulis æquales.
>
> At latere continuato duo contigui anguli per 1.c.8.e.5. æquantur duobus rectis.
>
> Latere igitur continuato duo contigui anguli æquant tres trianguli angulos. Iam,
>
> Communi sublato, exterior relinquetur æqualis reliquis interioribus & oppositis.
>
> At qui exteriori contiguus est, communis est.
>
> Illo ergo sublato exterior relinquitur æqualis reliquis.

Quódnam est tertium?

Continuato latere, exterior angulus est maior utrolibet interiore opposito. 16.p.1.

Quomodo demonstratur?

Pari lucro ex 32. e. assumitur: ut in primo assumptum est: Nam si æquatur duobus, maior est utrolibet.

Quomodo demonstrat Proclus?

Causam refert ad inclinationem laterum maioré & minorem. Ex eoq; tibi considerandū est(ait) quomodo rerum ortus ueras quæsitorum causas in conspectum nobis afferunt. Nam,

Inclinatio maior, maiorem facit angulum, minor minorem.

At exterioris anguli inclinatio maior est interioris utriuslibet angulo.

Exterior igitur angulus maior est interiore utrolibet.

Hæc Proclus: in quo laudandus ille quidem est, quòd demonstrationem ex causis tam curiosè repetat, sed multò magis esset laudandus, si sequeretur. Hæc enim causa est ex axiomate æqualium angulorum.

Quódnam est alterum elementum de angulorum ratione?

Est de æqualitate angulorum. Nam si triangulum est æquicrurum, est in basi æquiangulum: & contra. τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐὰν αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 5. & 6.p.1. Huius inuenti autor primus Thales Milesius perhibetur. Quinta propositio æqualitatem angulorum è laterum æqualitate docet: ut sexta laterum æqualitatem ex æqualitate angulorum. Inæqualitas contraria docetur 18 & 19.p.1.

Quot in antecedente quæruntur?

Duo: Vnum de ipsa antecedente, alterum de eius demonstratione.

Quomodo de antecedente?

Thales 5.p.1. proponit de triangulis æquicruris; ut uideri possit comparatio de pluribus esse cum de unico agatur: deinde specialiter proponit, quòd commune est omnis trianguli duo latera æqualia haben-

tis, siue æquilaterum siue æquicrurum sit. Imò (ait Geminus) trianguli permisti id commune est: demõstrauit enim: Si duę lineę rectę æquales, in lineam similarem seu rectam, seu rotundam, seu helicem cylindraceã inciderint, angulos ad basim æquales esse: & si anguli ad basim sint æquales, latera quoque æqualia esse.

Quęnam est inquisitio demonstrationis?

Questio est de ęqualitate interiorum angulorum. Euclides probat per exteriores angulos adhibitis è tertia propositione lineis decem & è 4.p. triangulis quatuor: quę hysterologia manifesta est. Nam,

Qui cum de unius trianguli proprietate agitur, comparationem triangulorum pro argumẽto demonstrationis usurpat: hysterologiam committit.

At Euclides id facit.

Hysterologiam igitur committit.

Pappus id uitium in Euclide de interioribus per exteriores demonstratis quodammodo animaduertit, simpliciusq́; uno triangulo, tanquam sibijpsi lateribus oppositis superposito interiorum angulorũ æqualitatem sine exterioribus angulis demonstrauit. Verùm & Pappus ipse in hysterologiam licet minorem, attamen incidit: quia de simplici triangulo per comparationem triangulorum agit.

Quomodo igitur Ramus demonstrat?

Axioma angulorum ęqualium cum thesi propositionis rem perspicuè demonstrabit. Nam,

In qua figura anguli duo habent ęqualium laterum bases ęquales, ea est in basi ęquiangula. 1.c.6.e.3.

At triangulum ęquicrurum est figura in qua anguli duo habent ęqualium laterum bases ęquales.

Trian-

Triangulum igitur ęquicrurum est in basi ęqui angulum.

Itaq; trianguli ęquicruri proprietas protinus ex axiomate assumetur:idemq; de triangulo ęquilatero &uario assumetur,quòd omnes anguli sunt ęquales,quòd nulli anguli sunt ęquales.

Quot quæruntur in conuersa?

Tria:Enunciatio,Specialitas & Demonstratio.

Quænam est eius enunciatio?

'Αντίστροφον illud multò disertius expositum est in 6.p.1.quàm hypothesis antecedens.Hîc enim de triangulo generaliter agitur,non de ęquicruro.

Quænam est eius specialitas?

Gemini ratio hîc restat,quòd id commune sit etiã curuilineorum:potest tamen omnino catholica esse propositio & ex antecedente conuersaq; una fieri: sic:Si trianguli duo latera sint ęqualia,duo anguli erunt ęquales:& si duo anguli sunt ęquales, duo etiã latera erunt ęqualia.Vt in antecedente τὸ διότι,in consequente τὸ ὅτι sit,id est, illic à causa ad effectum, hîc ab effectu ad causam arguatur.

Quænam est eius demonstratio?

Demonstratio Euclidis habet hic impossibile ex quartę thesi, quia sequeretur triangulum totum suę parti ęquale esse:imò (inquam) sequeretur impossibile triplex:nam pręter illud modò dictum sequeretur,ut bases inęquales essent ęquales, ut anguli inęquales esset ęquales.Sed hysterologia est eadem superiori,de proprietate unius trianguli per collationem multorum triangulorum philosophari. At impossibile multò breuius cogi potest.Nam,

Si triangulum in basi æquiangulum,non est ęquicrurum:sequitur ut,si à maiore crure amputetur ęquale per 2. c. 5.e.5. & connectatur cum basi,basis unius anguli ęquetur basi alterius anguli.

At hoc impoſſibile. Nam connexę baſis eſt minor: quia per 7. e. trianguli duo latera ſunt maiora reliquo ſeu tertio: at connexa eſt tertium, ideoq; minus: & ſic amputato cruri eſſet ęquale & ſimul eadem minus.

Illud igitur neceſſe.

Quot ſunt hic conſectaria?

Quatuor. Primum eſt: Si trianguli ęqua crura continuentur, anguli ſub baſim ęquabuntur. Προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων τοῦ τριγώνου εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 5. p. 1.

Quænam eſt eius demonſtratio?

Exteriores ęquicruri angulos iterum demonſtrat Euclides per collationem triangulorum ad theſin quartę propoſitionis: quę ſuperior hyſterologia eſt. Sed melius ſic demonſtratur:

Aequales duobus rectis, ęquantur inter ſe,

At in ęquis cruribus cōtinuatis, bini ęquantur duobus rectis, per 1. c. 8. e. 5.

In ęquis igitur cruribus cōtinuatis, bini ęquantur inter ſe. Iam,

Detractis ęqualibus ab æqualibus, ęquales relinquuntur.

At interiores ęquales detrahuntur.

Exteriores igitur ęquales relinquuntur.

Quænam eſt eius conuerſio?

Euclides non conuertit, ſed Proclus: Si productis lateribus, anguli ſub baſim ſint ęquales, duo latera quoq; ſunt ęqualia.

Quódnam eſt ſecundum conſectarium?

Si triangulum eſt æquilaterum, eſt æquiangulum & contra. Antecedens, argumentum habet à cauſa ad effectum: conuerſa, ab effectu ad cauſam. Itaq;

In qua figura omnes anguli habent æqualium laterum baſes æquales, ea eſt æquiangula. 1. c. 6. e. 3.

At triangulum æquilaterum figura eſt in qua anguli omnes habent ęqualium laterum baſes ęquales.

Triangulum igitur æquilaterum eſt æquiangulum.

Quódnam eſt tertium?

Angulus trianguli æquilateri ualet duas tertias recti. Nam cum 3 anguli æquales æquentur 2 rectis, 1 æquabitur $\frac{2}{3}$. Et 23. p. 1. Regiom.

Quódnam eſt quartum?

Triangula ſex æquilatera complent locum. Nam,
Quatuor recti complent planum locū. 16, e. 4.
At ſexies duę tertię recti ſūt 4 recti. $\frac{6}{1}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{12}{3}$ 4.
Igitur ſexies duæ tertiæ complent planum locum.

Quódnam eſt tertium elementum de angulorum ratione?

Eſt de angulorum inęqualitate, quę docetur 18 & 19. p. 1. Trianguli maius latus ſubtendit maiorem angulum & maior angulus ſubtenditur à maiore latere. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει: καὶ παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Quot ſunt hîc conſideranda?

Tria: Accuratio, Demonſtratio & Cauſa.

Quǽnam eſt Euclidis accuratio?

Euclides bis peccauit, quod ex eadem propoſitione duas fecit & utramq; καθόλου propoſuit. In uario quidem triangulo inæqualitas maxima, media, minima eſt, tum laterum tum angulorum. In æquicruro maior ſimpliciter & minor eſt. Sed in æquilateris hæc theoremata locum non habent. Itaq; ut æqualitas ſuperior duobus generibus ęquilateris & æquicruris, ſic inęqualitas hæc duobus æquicruris & uarijs conuenit. Propoſitio igitur non ſatis accurata

est, cum ait omnis trianguli, quia ista inæqualitas non sit omnis trianguli.

Quænam est Euclidis demonstratio?

Est per 5. & 16. propositiones primi.

Quænam est eius causa?

Est ex axiomate æqualium angulorum. Nam,

Si angulus angulo æquicrurus est maior basi, est maior. 3.c.6.e.3.

At in triangulo a e i angulus a e i, æquicrurus ipsi o i e, est maior basi angulo o i e.

Angulus igitur a e i est maior.

Causam huius rei etiam Proclus quæsiuit. Causa enim consequentis, est in propositione antecedentis, latus nempe subtendens est basis anguli, ut hîc disertè ait: Manifestum autem quod causa huius affectionis est laterum ipsius angulum subtendentis ὑπεροχὴ κατὰ μέγεθος ἢ ἐλάττωσις excessus secundum magnitudinem aut defectus. Axioma igitur æqualium angulorum hanc etiā demonstrationis causam præstabit. Conuersa sic patet:

Si angulus angulo æquicrurus, est maior: est maior basi 3.c.6.e.3.

At in triangulo angulus a e i æquicrurus angulo o i e est eodem maior.

Angulus igitur a e i maior est basi.

Atq; hactenus de simplici cōparatione unius trianguli: sequitur comparatio mistæ proportionis.

Quænam est comparatio mistæ proportionis in uno triangulo?

Est de lateribus & angulis. Nam si recta in triangulo bisecat angulum, secat basin ratione crurum: & contra 3.p.6.

Quænam est eius demonstratio?

Satis est operosa: in ea enim concurrunt multa ex superioribus, ut anguli bisectio, parallelismus seu erectio, continuatio, sectio & proprietates parallelarum,

rum, proportio intersegmentorum & æqualitas angulorum. Nam quod ad antecedentem partem attinet,

I. Angulus est bisectus. Nam si angulus angulo æquicrurus æquatur basi, est æqualis 1. c. 6. e. 3.

At hic duo anguli æquicruri, æquantur basi.

Hic igitur anguli duo sunt æquales: ideoq; angulus est bisectus.

II. Secat basin ratione crurum. Nam ut e a ad a i: ita e o ad o i.

At e a est æqualis a i.

Ergo e o est æqualis o i.

Assumptionis prosyllogismus hic est. Nam si per 3. c. 12. e. 5. parallela erigatur contra rectam bisectricem anguli, & continuetur e a infinitè, secabit ipsam parallelam per c. 11. e. 5. in u. Iam,

Et e a ad a u, sic e o ad o i per 13. e. 5. sunt enim intersegmenta proportionalia è rectis lineis quæ pluribus parallelis intersecantur.

At a u æquatur a i per 10. e. Sunt enim æqualia latera triãguli in basi æqanguli. Nã,

Si triangulum in basi est æquiangulum, est æquicrurum.
At hoc triangulum est in basi æquiangulum: alter enim angulus æquatur alterno per 12. e. 5. & per thesin æquali & per 12. e. 5. interiori: æquatur igitur & æquali.
Est ergo æquicrurum.

Ergo e o æquatur o i.

Quod uerò ad conuersam attinet:

I. Secat basin ratione crurum. Nam ut e a ad a i: sic e o ad o i.

At e a æquatur a i.

Ergo e o æquatur o i. Nam,
Vt e a ad a u: ita a i, ad a u.
At e a ęquatur a u per 8.e.
Itaq; a i æquatur a u.

II. Augulus est bisectus. Nam ęqualia ęqualibus, inter se sunt ęqualia, axio. 1.
At anguli e a o & o a i ęquantur angulis ad u & i per 12.e.5.
Anguli igitur e a o & o a i sunt ęquales: ideoque angulus bisectus est.

Atq; hactenus de comparatione unius trianguli, sequitur comparatio duorum.

LIB. VII. De Comparatione triangulorum.

Quot sunt consideranda in comparatione duorum triangulorum?

Tria: Ratio, Proportio & Similitudo.

In quibus rebus est ratio?

In lateribus & angulis.

Quottuplex est?

Duplex: Aequalitatis & Inæqualitatis.

Quęnam est ratio æqualitatis?

Ex æqualitate laterum, ducitur & ęqualitas angulorum.

Quot sunt elementa de ratione æqualitatis?

Tria: I. Triangula æquilatera sunt æquiangula. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ: ἔχῃ δὲ καὶ βάσιν τῇ βάσει ἴσην: καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. 8.p.1.

Quot sunt hîc consideranda?

Sex: Grammatica uerborum, Demonstratio Euclidis, Differentia 7. & 8.p. Demonstratio Rami, Conuersio & Methodus.

Qualis est Grammatica verborum?

Prolixa est. Dic, Triangula inter se æquilatera sunt æquiangula, totam istam Grammaticam tot uerborum compræhenderis.

Quænam est demonstratio Euclidis?

Euclides ἐφάρμοσιν hic adhibet: ut in 4. p. Sed impossibile adhibet è 7. p. Verùm sine impossibili potest conuenientia probari, si septima propositio affirmauerit, id cuius contrarium negat: & sic incidet in octauam p. Sic enim erit. Si super eandem rectā duabus rectis duæ rectæ conterminæ & æquales inter se, eodem uersus ducantur: in idem punctum conuenient. Quod idem est ac si diceretur: Si bina duorum eiusdem basis triangulorum contermina latera separatim æqualia, eodem uersus ducantur, conuenient in idem punctum: ideoq; æquabuntur anguli angulis & triangulum triangulo.

Nihil igitur differunt 7. & 8. p.?

Vtriusq; quidem hypothesis una est: utraq; enim ponit æqualitatem & basium & laterum: differre tamen quibusdam uidentur quæsito & consequente, quod septima conuenientiam totius trianguli cum toto ex antecedente suo deducit, octaua ex eodem antecedente deducit præterea æqualitatem angulorum. At ista differentia nihil habet re ipsa diuersum. Nam posito illo antecedente, ubi conuenientiā concluseris totius cum toto, angulorum etiam æqualitatem è conuenientia illa concludes: itemq; ubi ex eodem conuenientię antecedēte angulorum æqualitatem concluseris, indidem potes & conuenientiā concludere. Quare si res spectetur propositio una est, nec duas factas ob aliam causam uideo, quàm ut Euclidi syllogisticæ demonstrationes suppeterēt ad octauam demonstrādum. Verùm octaua ista multò uerius demonstrari potuisset secundum Ramum.

Quæ-

Quaenam ergo est Rami demonstratio?

Est ex æqualium angulorum axiomate & propositionis ipsius hypotheſi:idq; autore Proclo, qui hîc ait: Videtur autem uerticalium angulorum æqualitatem laterum illos angulos compræhendentium baſiumq; æqualitas facere: tandemq; poſt expoſitionem paulò hac de re pleniorem: Certùm igitur eſt (ait) dicere quòd & baſis eadem & latera æqualia, ipſius anguli æqualitatem determinant. Sit igitur ex axiomate & hypotheſi huius propoſitionis hic ſyllogiſmus:

Anguli cruribus congrui ſunt æquales.
At hîc anguli ſunt, cruribus congrui: quia laterum æqualium æquales ſunt baſes.
Hîc igitur anguli ſunt æquales.

Poteſt'ne conuerti hæc propoſitio?

Proclus putat octauam eſſe conuerſionem quandam quartæ. Sed conuerſio in planis falſa eſt, quę in ſphæricis uera eſt.

Quid de methodo?

Laborat Proclus, ut hîc methodum Euclidis tueatur: Octaua eſt conuerſa quartæ, cur igitur non ſtatim poſtponitur quartæ, ut ſexta quintæ? quia (inquit) octaua per ſeptimam & ſeptima per quintam demonſtratur. Sed hoc item alienum. Nec enim eſt conuerſa, ut dictum eſt. Deinde non uult per ſeptimam, nec ſeptima per quintam demonſtrari. Philo mathematicus hîc etiam Euclidem in iſto ordine repræhendit, quòd octaua poſſet ſine ſeptima demonſtrari. Eius demonſtratio per impoſſibile triplex eſt apud Proclum: ſed impoſſibili nihil hîc opus eſt: angulorum æqualium axioma totum demonſtrationis huius pondus ſuſtinet.

Quódnam eſt ſecundum elementum?

Si duo triangula æquantur angulis uel duobus æquicruris uel binis æqualis aut cruris aut baſi duorum:

rum:sunt æquilatera.4.& 26.p.1. quæ è triplici thesi eandem laterum æqualitatem colligunt. Nam anguli duo æquicruri:item anguli bini ęqualis cruris: deniq; anguli bini æqualis basis duorum crurum, faciunt æqualitatem laterum.

Quot sunt in 4.p.consideranda?

Tria:Verbositas,Partes & Demonstratio.

Quænam est verbositas?

Verbosè proponit,quod perspicuè breuiterq́; cōpræhendi potest:Triangula æqua angulo æquicruro,sunt æquilatera,ideoq́; æquiangula.

Quot sunt eius partes?

Duæ.Nam ex duplici æqualitate data, demonstratur triplex æqualitas.

Quæ nam est duplex æqualitas data?

Est æqualitas binorum laterum & angulorum.

Quæ nam est triplex æqualitas demonstrata?

Prima est basis cùm basi.Nam,

Duæ rectę ab eodem puncto ad idem punctum congruentes sunt æquales.

At duæ istæ bases duorum triangulorum bina latera & angulos ęquales habentium,ab eodem puncto ad idem punctum congruunt.

Sunt igitur æquales.

Secunda est angulorum reliquorum binorum unius trianguli cum reliquis binis angulis alterius trianguli,separatim tamen singulorum inter se, & quidem æqualibus lateribus compræhensorum.

Tertia est totius trianguli cum toto triangulo, quam tamen Euclides ὕστερον πρότερον secundam fecit:cum tamen cœpisset ab æqualitate laterum.

Quomodo demonstrat Euclides duplicem postremam æqualitatem angulorum & triangulorum?

Ἐφάρμοσιν & conuenientiam assumit, superpositis & applicatis triangulorum lateribus inter se. Itaque

(ait

(ait Proclus) demonstrationis Euclideæ causa est ἰφαρμόσεως conuenientia, demonstratioq; tota ab ipso statim principio conclusa: ut Euclidis iudicio ἰφαρμόσεως fundamentum statuatur infinitorum, quæ deinceps per 4.p.1.demonstrantur.

Quomodo demonstrat eandem Ramus?

Si quis accuratius theorema ipsum penitiusq; intueatur, duo posita antecedentia causam demonstrationemq; continent duorum consequentium: primò basium æqualitas ex æqualitate anguli cum angulo deducitur. Nam,

Aequales anguli cruribus congrui, bases habēt æquales.
At hic æquales sunt anguli æqualium laterum, id est cruribus congrui.
Itaq; hic bases sunt æquales, quia bases etiam congruæ & unæ sunt.

Ex hac cōclusione assumitur pro reliquis angulis.
Vbi æqualium laterum sunt bases æquales, ibi anguli æquales sunt.
At hic æqualium laterum bases sunt æquales.
Hic ergo sunt anguli æquales.

Atq; hæc de 4.p.seu de prima parte huius secundi elementi: sequuntur demonstrationes secūdæ & tertiæ partis.

Quæ nam est demonstratio illarum duarum thesium?

Concluditur ex eodem angulorū æqualium axiomate.1.c.6.e.3. Nam quod ad secundam attinet.

Si triangula æqua binis angulis æqualis cruris, non sunt æquilatera: tum à latere maiore amputato æquali angulus cui crus amputatum subtenditur æquabitur angulo alterius trianguli cui totus æquatus est ex thesi: & sic æquabitur totum & pars.
At hoc impossibile.

Illud

Illud igitur necesse. Itaq; per antecedentem partem.

Triangula æquicrura, angulo crurum æqualia, æquantur basi.

At hîc triãgula sunt æquicrura, angulo crurum æqualia.

Sunt igitur basi æqualia. ideoq; æquilatera.

Quod uerò ad tertiam attinet,

Si triangula æqua binis angulis basis duorum crurum, non sunt æquilatera: tũ à latere maiore amputato æquali, angulus cruris amputati æquabitur æquali per thesim, hoc est, exterior interiori.

At hoc impossibile. Nam continuato trianguli latere, exterior angulus æquatur duobus interioribus oppositis. 2.c.9.e.6. Vnus igitur interior est minor exteriore.

Illud igitur necesse. Itaq; per antecedentem partem,

Triangula æqua angulo crurum æqualium, & basi angulorum, sunt æquilatera.

At hîc triangula sunt æqua angulo crurum & basi angulorum.

Sunt igitur æquilatera.

Quódnam est tertium elementum?

Triangula æquantur ternis angulis. Nam,

Triangula quorum tres anguli æquantur duobus rectis, æquantur ternis angulis.

At in quolibet triangulo tres anguli æquantur duobus rectis.

Quælibet igitur triangula æquantur ternis angulis, uniuersim sumptis, non sigillatim.

Atq; hæc de ratione æqualitatis.

Quænam est ratio inæqualitatis?

Est è communi & generali inæqualitate angulorum de qua 3.& 4.c.6.e.3.

Quot

Quot sunt eius elementa?

Duo: I.Si triangulum triangulo æquicrurum est maius basi,est maius angulo:& contra. Nam è 3.c. 6.c.3.

Angulus angulo ęquicrurus, sed maior basi,est maior.

At hic in triangulis æquicruris, angulus æquicrurus unius,est maior basi.

Ergo est maior:& è contra.

Angulus angulo ęquicrurus si est maior,est maior basi.

At hìc in triangulis æquicruris, angulus unius est maior.

Est igitur maior basi.

II.Si triangulum triangulo in eadem basi est minus interioribus cruribus,est maius angulo crurū. Nam è 4.c.6.c.3.

Angulus angulo æqualis basi, sed minor interioribus cruribus:est maior.

At hìc in triangulis in eandem rectam insistentibus,sunt anguli æquales basi, sed interior minor est cruribus.

Hìc igitur in triangulis minor cruribus, est maior.

Atq; hactenus de ratione æqualitatis & inæqualitatis:sequitur proportio.

DE PROPORTIONE.

Quottuplex est proportio triangulorum?

Duplex: Recta cum basibus & Reciproca.

Quænam est recta?

I.Triangula ęquealta sunt ut bases. τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. 1.p.6. Cōsectarium est è 12. c.4. Nam,

Figuræ primæ æquealtæ sunt ut bases. 12.c.4.

At triangula sunt figuræ primæ.

Triangula igitur æquealta sunt ut bases.

Quot sunt hic consectaria?

Duo. I. Triangula ęquealta in æquali basi, sunt æqualia. Nam

Figuræ primæ æquealtæ in basi æquali, sunt æquales. c 12. e. 4.

At triangula æquealta sunt figuræ primę ęquealtæ.

Triangula igitur æquealta in basi æquali, sunt æqualia.

Vnde etiam Archimedes cōclusit 7 theo. 1. de sphæ. Si triangulum triangulis æquealtum habet basim basibus æqualem, æquatur uniuersis. Hinc etiam concluditur:

Triangula ęquealta in ęquali basi, sunt ęqualia.

At triangula ęquilatera sunt triangula æquealta in æquali basi.

Triangula igitur ęquilatera, sunt ęqualia: quod Euclides 4. p. 1. conclusit per ἐφαρμογῆν.

II. Si recta à uertice trianguli bisecat basin, bisecat triangulū, & diameter est trianguli. Nam,

Triangula æquealta in æquali basi sunt æqualia. 1. c. 6. e.

At bisegmenta rectæ à uertice trianguli in basin, sunt triangula æquealta (nempe communis uerticis intra easdem parallelas) & in basibus ęqualibus.

Bisegmenta igitur illa sunt æqualia.

Et recta illa erit diameter. Nam,

Recta per centrum, est diameter. 5. e. 4.

At bisecans basim, est recta per centrum.

Bisecans igitur basin est diameter.

2. Si recta est à uertice trianguli ad datum in basi punctum nō medium, & parallela sit à medio basis in latus: recta à uertice parallelæ in dictum punctum, bisecabit triangulū. Nam si recta à uertice tri-

anguli, in medium basis connectatur, bisecabit per 2.c.6.c. & faciet duo triangula æquealta. Itaq;

In triangulis æqualibus si commune tollatur, reliqua erunt æqualia.

At hîc si recta à uertice trianguli in medium basis cõnectatur, faciet triangula æqualia: quia æquealta in eadem basi.

Hic igitur si commune tollatur, reliqua erunt æqualia.

Iam si æqualia æqualibus addantur, tota erunt æqualia.

At commune rectilineum additur hîc utrique æqualium.

Tota igitur erunt æqualia: & per consequens reliquum rectilineum dimidium erit.

Quæ nam est reciproca proportio?

Si triangula æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra. τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 15.p.6. Nam,

Figuræ primæ reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales: & contra. 13.e.4.

At triangula æquiangula sunt figuræ primæ.

Triangula igitur æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt æqualia: & contra.

Antecedens manifestum est, quoties æqualis angulus rectus est: tum enim crura ista æquales sunt altitudines & bases. Vt hîc in separatis triangulis: Nam,

Vt 2 ad 3. ita 4 ad 6.

At 2 ad 3 sunt in proportione sesquialtera.

Ergo & 4 ad 6. in eadem.

Iam bis sex sunt 12 area parallelogrammi, cuius dimidium est area trianguli, nimirum 6. idem est de ter quatuor. Ideoq; triangula sunt æqualia.

In tri-

In triangulis autẽ obliquangulis, licet crura non sint altitudines, ueritatis tamen causa eadẽ est. Nam,

Proportionalia sunt inter se æqualia.

At duo triangula æquiangula in isto diagrammate sunt proportionalia ad tertium.

Sunt igitur inter se æqualia.

Conuersa eodem modo, sed inuersè concluditur.

DE SIMILITVDINE.

Quid est similitudo triangulorum?

Quæ constat è ratione angulorum & proportione crurum. Itaq; merito angulorum ratio præponitur, unde crurum non ratio, sed proportio posterior colligitur.

Quot sunt de illa elementa?

Quatuor. I. Si duo triangula sunt æquiangula, sunt proportionalia cruribus: & contra. τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. 4. p. 6. ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι. 5. p. 6. Est autẽ in triangulis singulare hoc priuilegium, quòd æqualitas angulorũ, concludit proportionem laterum & contrà: quód in quadrilateris falsum fit. Respondet autẽ modo quodam hoc elemẽtum de proportione triangulorum, octauæ primi de ratione triangulorum, sed dissimiliter: Si triangula sunt æquilatera, sunt æquiangula: non contra. 8. p. 1. At hæc conuersio ualet ex æqualitate angulorum ad laterum non ęqualitatẽ, sed proportionem. Item illa protinus ex axiomate æqualiũ angulorum patuit: at non ista protinus è definitione similium figurarum. Definitio enim illa, duo complectitur quæ singula hîc separantur. Additur uerò in utraq; præpositione ab Euclide ὁμολογία laterum ad angulos æquales: quod consectarium potius esse debuit: ideoq; à Theone non demonstratur. Hîc tria

consid.sunt: Vsus, Demonstratio & Consectaria.

Quis est usus 4 & 5.p.6?

Magnus earum prorsus & excellens Geometriæ usus est in geodæsia rectarum.

Quæ nam est eius demonstratio?

Eam habes in Ramo facilem.

Primò est fabrica duorum triangulorum æquiangulorũ & ad eandem rectam communi puncto com paratorum: in quibus duo latera ad rectũ angulum sunt parallela per 12.e.5.cùm enim rectę sint recta secte, ęquant angulos interiores. Ideoq; alterum latus minoris trianguli & latus maioris ad rectum angulum continuata concurrent. per 1.c.12.e.5.

Secundò demonstratio triplex quòd sint proportionalia cruribus.

Proportio
- 1
  - *Directè.* *Vt e.i.ad i.u.* *Sic e.a.ad a.y.i. ad i.o.per 5.c.12.e.5.*
  - *Alternè.* *Vt i.o.ad i.u.* *Sic e.a.ad i.o.*
- 2
  - *Directè.* *Vt y.o. id est, a.i.per 5.c.12.e.5.ad o.u.* *Sic e.i.ad i.u.*
  - *Alternè.* *Vt e.i.ad a.i.* *Sic i.u.ad o.u.*
- 3 *Aequeordinatè.* *Vt a.e. ad a.i.* *Sic o.i. ad o.u.*

Quod ad cõuersam attinet: primò est fabrica triũ triangulorum proportionalium cruribus: duorũ ex thesi, tertij ex fabrica. Deinde est demonstratio duplex, quòd sint æquiangula:

Nam

Nam 1. Vt a. e. ad e. i.
Sic o. u. ad u. y.
2. Vt a. i. ad i. e.
Sic o. y. ad y. u.

Quænam sunt eius consectaria?

I. Si recta in triangulo est parallela basi, desecat triangulum æquiangulū toti & minus basi. II. Si duæ rectæ intersectæ connectantur rectis parallelis, segmēta sunt proportionalia. Vitellio 26.p.1. Aequiangula enim triangula fient, ut patet per alternos. III. Si triangula rectangula sunt similia: quadratum à simulutraq; basi æquatur quadratis à simulutrisq; cruribus homologis. Theon 1. Const. Exempli gratia: sunto duo triangula, quorū unius basis sit 5. latera homologa 3 & 4: alterius basis 10. latera homologa 6 & 8. Quadratū basis 5 est 25, basis 10 est 100. Quæ simulutraq; faciunt 125. Iam quadratum à latere 3 est 9: à 4 est 16: hoc est coniunctim 25: à latere 6 est 36: ab 8. 64: hoc est coniunctim 100.

Basis

Vna	*Altera*
5	10
5	10
25	100

Crura homologa.

3	4	6	8
3	4	6	8
9	16	36	64
25		100	

Quod nam est secundum elementum?

Si duo triangula sunt proportionalia cruribus æqualis anguli, sunt æquiangula. Εὰν δύο τρίγωνα μίαν

 γωνί-

γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον: ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι. 6. p.6. Respondet quartæ primi libri ratione triangulorum: quodq; illa de ratione reliquorū angulorum ex æqualitate unius anguli & duorum laterum concludit, ista similiter concludit ex æqualitate unius anguli & proportione duorū laterum. Pars de homologis lateribus consectarium esse debuit, ut antè: patet enim è demonstratione reliquorum.

Quod nam est tertium?

Si cruribus proportionalia & alternè parallela, intermedium angulum faciunt: bases habēt in rectam continuas. *Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται*. 32. p.6.

Quot sunt hic consid.?

Tria: Causa, Fabrica seu diagrāma & Demōstratio.

Quæ nam est causa?

Est è 1. c.8.e.5. Nam duos utrinq; facient cum incidente linea duobus rectis æquales.

Quæ nam est demonstratio?

Duo triangula duos angulos cum incidente linea duobus rectis æquales facientia, bases habent in rectam continuas. Recta enim insistens in rectam, æquat deinceps angulos. 1. c.8.e.5.

At hic sunt duo triangula, duos angulos cū incidente, duobus rectis æquales facientia.

Hic igitur triangula bases habēt in rectam continuas.

Quottuplex est approbatio assumptionis?

Triplex.

Quænam est prima?

De angulis extremis duobus quòd sint æquales.

Aequa-

Aequales alterno, ſunt æquales inter ſe.

At anguli duo extremi ſunt æquales alterno. per 12.e.5.

Anguli igitur duo extremi ſũt æquales inter ſe.

Quæ'nam eſt ſecunda?

Eſt de totis triangulis quòd ſint æquiangula.

Duo triangula proportionalia cruribus æqualis anguli, ſunt æquiangula. 10.e.

At hîc ſunt duo triangula proportionalia cruribus æqualis anguli.

Ergo hîc duo ſunt triangula æquiangula.

Quæ'nam eſt tertia?

Eſt de tribus angulis, quod æquales ſunt duobus rectis.

Tres anguli æquales tribus angulis trianguli æquantibus duos rectos, æquantur & ipſi duobus rectis.

At hîc tres anguli ſunt, per 3. e. æquales tribus angulis trianguli, qui per 9.e.6. duos rectos æquant.

Illi igitur tres anguli ęquantur duobus rectis.

Quod'nam eſt quartum elementum?

Si habeant unum angulum æqualem, alterum cruribus proportionalem, tertiũ homogeneum: ſunt ęquiangula. *Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί*. 7.p.6. Euclides hîc uerbis obſcurior eſt: tria autem ponit, primò ęqualitatẽ anguli unius, ſecũdò proportionem in cruribus aliorum duorum angulorum, tertiò ut alteri reliquorum angulorum ſint homogenei, id eſt, ambo uel acuti uel obtuſi, uel etiam recti. Hîc duo conſid. ſunt: ut plerumq; Diagramma & Demonſtratio.

Quod nam est diagramma?

Diagramma requirit triangula
- *Aequa angulo.*
- *Proportionalia cruribus angulorum.*
- *Homogenea reliquo angulo.i. ut ambo anguli sint uel*
  - *Acuti*
  - *Obtusi*
  - *Recti*
  - *Itaq; triplex secundū hos est demonstratio.*

Quae nam est demonstratio de acuto?

Si triangula æqua angulo, proportionalia cruribus angulorum, homogenea reliquo angulo sunt; reliqui anguli cruribus proportionales æquantur. Nam,

Si non æquantur: tum si per 5.c.6.e.3. æquetur triangulum triangulo: habebis triangula æquiangula per 1.c.3.e. & angulus æquabitur angulo, acutusq́, erit uterque: & per 9.e. triangula lateribus erūt proportionalia, &c.
At hoc impossibile.
Illud igitur necesse.

Quae nam est demonstratio de vtroq; reliquo vel obtuso vel recto?

Idem prorsus accidet. Pars autem ultima de recto patet per c.3.e.

LIBER VIII. De Generibus triangulorum.

Hactenus de trianguli affectionibus: sequitur eius partitio ex anguli communibus differentijs, recti & obliqui.

Quottuplex est Triangulum?

Duplex: rectangulum uel obliquangulum.

Quid

Quid est Rectangulum?

Quod habet unicum rectum angulum. ἐκ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.27.d.1. Rectangulum triangulum in Geometria præcipuas uires habet, & à præstantibus Mathematicis non immeritò magister matheseos appellatur. Vnicus rectus angulus in triangulo esse potest: unicus item obtusus, quoniam etiam recto est maior: at ex uno acuto non appellatur acutangulum: sic enim quoduis triangulum esset acutangulum: sunt enim duo minimùm acuti in omni triangulo: sed acutangulum est triangulum ex omnibus acutis angulis.

Quot'nam hîc consid. sunt?

Tria: Consectaria duo, Elementa tria, & Geodæsia triangulorum rectangulorum similium.

Quod'nam est primum consectarium?

Est de fabrica rectanguli. Nam si duæ perpendiculares connectantur, constituent triangulum rectangulum. Hæc fabrica ducta est è definitione recti anguli. Nam,

Perpendiculares rectæ, recti anguli sunt artifices.8.e.3.

At in triangulo rectangulo sunt perpendiculares rectæ.

In eodem ergo est angulus rectus.

Quod'nam est secundum consectarium?

Si trianguli angulus ad basin rectus est, perpendicularis à uertice est crus alterum.

I. *Quod'nam est primum elementum?*

Si triangulum rectangulū est æquicrurum: uterq; angulus ad basim est dimidius recti: & contra. Nam quod uterq; dimidius sit recti, hinc patet: quia cū trianguli tres anguli sint æquales duobus rectis.9.e.6. sequitur ut cùm in rectangulo unus rectus sit, reliqui duo æquentur alteri recto. Item duo dimidij æquātur uni recto: ergo unus est dimidius rēcti. Nam

ut 2 ad 1 ad $\frac{1}{2}$. Deinde ambo dimidij inter se ęquantur. Nam,

Triangulum æquicrurum est in basi æquiangulum. 10.c.6.

At triangulum rectangulum hic est æquicrurum.

Est ergo in basi æquiangulum.

Quot'nam sunt hic consectaria?

Duo. I. Si trianguli angulus æquatur reliquis, est rectus. Nam,

Aequalis dimidio duorum rectorum, est rectus.

At trianguli angulus qui reliquis æquatur, æqualis est dimidio duorum rectorum.

Is igitur angulus est rectus.

Consectarium hoc est è 31.p.3.

II. Si recta à uertice trianguli bisecans basin est ęqualis bisegmēto, angulus uerticis rectus est. Nam primò quòd recta æqualis sit bisegmento, hinc patet quia triangula facit æquicrura. Itaq;,

Recta faciens triangula æquicrura & particulares uerticis angulos æquales extremis: est æqualis bisegmento.

At recta à uertice trianguli bisecans basin, facit triangula æquicrura: & particulares uerticis angulos æquales extremis. per 10. c. 6. Est Iordani. 1.p.

Est ergo æqualis bisegmento.

Deinde quòd uerticis angulus rectus sit: hinc patet:

Trianguli angulus reliquis æqualis, est rectus. 1. c.

At uerticis angulus in triangulo est reliquis æqualis.

Verticis igitur angulus est rectus.

II. Quod-

II. *Quod'nam est secundum elementum?*

Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in basin, secat triangula similia toti & inter se. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ: τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 8.p.6.

Quot sunt hic consideranda?

Quinque: Fœcunditas, Demonstratio, Vsus, Conuersa, Consectaria.

Quae nam est eius fœcunditas?

Insignis est multiplici fœcunditate. In una enim propositione sunt propositiones quodammodo sex: quòd totum sit simile huic parti, quòd illi, quòd partes similes inter se: ceteræ tres sunt in duobus consectarijs: de quibus mox.

Quae nam est eius demonstratio?

Hæc omnia per duas tantùm propositiones. 32.p.1. & 4.p.6. demonstrantur. Nam primò quòd sint similia toti, hinc constat:

Particularia triangula æquiangula toti, sunt similia toti.

At ista particularia triangula, quæ perpendicularis ab angulo recto in basim secat, sunt æquiangula toti: quia utrinque rectus unus & alter communis. Reliquus igitur æquatur reliquo per 9.c.6. Itaque particularia triangula sunt æquiangula toti, proportionaliaque cruribus æqualium angulorum. per 9.c 7.

Sunt igitur similia toti.

Deinde quòd inter se sint similia, patet hinc:

Figuræ similes eidem, sunt similes inter se 3. c. 14. c. 4.

At particularia ista angula sunt similia eidem toti.

Sunt igitur inter se similia.

Quis est vsus huius elementi?

Permagnus est in dimensionibus planorum. Itaque uidetur in hac una propositione certare demonstrationis elegantia cum doctrinæ fœcunditate, & usus atque utilitas cum utraque.

Est'ne conuersa etiam vera?

Est: Nam secus duæ inæquales essent mediæ proportionales inter easdem datas.

Quot sunt eius consectaria?

Duo. I. Perpendicularis est proportionalis inter segmenta basis. Nam,

Aequaliũ angulorũ crura sunt proportionalia.
At perpendicularis & segmenta sunt æqualium angulorum crura.
Perpendicularis igitur & segmenta sunt proportionalia.

Hinc Platonis mesographus inuentus est, qui est parallelogrammum rectangulũ latere uno mobili per cauum conterminorum laterum: cuius figura est ex Eutocio ad 2.th.2. de sphæra Arch. Platonis autem mechanica sic est: Si duæ datæ rectæ rectę contermīnæ infinitè è contermino continuentur; mesographus incidens latere mobili & opposito in principia datarum & angulis in cõtinuatas, intersecabit è continuatis duas continuè proportionales datis.

II. Crus utrumlibet est proportionale inter basim & basis segmentum conterminum. Nam,

Latera quæ subtendunt æquales angulos sunt homologa.1.c.14.e.4.
At crus utrumlibet & basis segmentum, sunt latera subtendentia æquales angulos.
Sunt igitur homologa.

III. *Quod'nam est tertium elementum?*

Si basis trianguli subtẽdit rectum, rectilineum ad eam situm æquatur rectilineis ad crura similibus simili-

militerque sitis: & contra, Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. 31.p.6.

Quot sunt hîc consideranda?

Tria: Singularitas, Improprietas & Demõstratio.

Quæ nam est eius singularitas?

Propositio hæc Proclo uidetur ad 47.p.1. generalis & reuera est in primis genere ipso nobilis, sed nobilior etiam demonstratione breui & facili. Mirum tamen est hanc propositionem licet generalem nusquam ferè appellari. 47.p.1. specialem infinitis locis citari. Sed specialis quadratorum usus id efficit.

Quæ nam est eius improprietas?

Ter loquitur impropriè hîc Euclides. I. Cùm formam nominat pro triangulo aut triangulato: id enim solidis corporibus conuenire nõ potest. Nec enim cubus basis æquatur cubis, crurum, ut in lateribus trianguli 3.4.5. est manifestum. Ergo non quælibet forma hîc compræhendi potest. II. Cùm dicit à subtendente illud figura pro figura comparata subtendenti. III. Cùm ait similiter descriptũ, quod nihil ad Geometriam facit, nec situs omninò respondet, cùm primum triangulatum planum possit esse horizonti, cùm reliqua sublime erigantur, neq; omninò differentiæ situs respondent.

Quæ nam est eius demonstratio?

Primò fiat diagramma trianguli rectanguli: deinde duo triangula ad crura: tertiò ijs simile similiterque situm ad basim per 4.c.14.e.4. Hoc tertium duobus illis æquatur. Sit enim ab angulo recto perpendicularis: hæc ostendet proportionales bis ternas per 2.c.4.e. Itaque,

Vt basis tota est ad maius segmentum: sic triangulum basis totius, est ad triangulum maioris cruris. Et ut basis tota est ad minus segmentum:

mentum; sic triangulum basis totius est ad triangulum minoris cruris: per 1.c.15.e.4.

At basis tota æquatur duobus segmentis: suis nempe partibus.

Quare per secundam compositionem in Arithmetica lib. 2. cap.9. triangulum basis, æquatur triangulis crurum.

Quomodo demonstratur conuersa?

Primò ponitur diagramma. Sit triangulum rectangulum & perpendicularis erigatur super crure minore, æqualis ipsi cruri maiori, & connectatur cũ basi. Hìc iam duo consid. sunt: Aequalitas, & Angulus rectus. Nam per præcedentem sita ad o e & e a rectilinea, id est, per fabricam ad a e & i e æquantur rectilineo ad a o simili & similiter sito, & ex thesi æquantur simili & similiter sito ad a i. Itaque ad o a & a i similia rectilinea cùm sint æqualia, homologa latera babebunt æqualia, per 1.c.14.e.4. & triangula duo fient æquilatera, & per 1.e.7. æquiangula. Rectus autem est ex fabrica o. e. a. cui æqualis concluditur a. e. i. Itáque a. e. i. per 8. e.5. est rectus.

Quid nam est triangulum obliquangulum?

Quod nullum habet rectum angulum. Estq; obtusangulum uel acutangulum. Hæc partitio est è specialibus anguli differentijs.

Quid est obtusangulum?

Quod unum habet obtusum angulum. ἀμβλυγώνιον τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. 28. d. 1. Rectus unicus est in triangulo, itaq; & obtusus.

Quot sunt hic consectaria?

Tria. I. Si obtusus angulus est ab basin, perpendicularis à uertice cadit extra. Nam si esset rectus ad ba-

ad basin perpendicularis esset crus alterum, ut patet.2.c.2.e.

II. Si trianguli angulus sit maior reliquis, est obtusus. Nam si æquaretur reliquis esset rectus. 1.c.3.e.

III. Si recta à uertice trianguli bisecans basin, est minor bisegmento, angulus uerticis obtusus est. Nã si ęqualis esset, esset rectus.2.c.3.e.

Quid est triangulum acutangulum?

Quod habet omnes acutos angulos. ὀξυγώνιον τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.29.d.1.

Quot sunt hic consectaria?

Tria. I. Perpendicularis à uertice cadit intra: patet per 2.c.2.e.

II. Si trianguli angulus sit minor reliquis, est acutus: ut patet per 1.c.3.e.

III. Si recta à uertice trianguli bisecans basim est maior bisegmento, angulus uerticis acutus est: ut patet per 2.c.3.e.

LIBER IX. De Geodæsia rectarum è triangulis rectangulis similibus.

Quis est usus in hac Geometria triangulorum rectangulorum similium?

Hæc Geometria cum plerosque alios usus habet, tum in primis Geodæsiam linearum rectarum suppeditat & magisterium Geometriæ in triangulis rectangulis antea collocatum, tandem uerum hic esse deprehendetur. Continebit enim geodæsiam rectarum, posteaque geodęsiam planorum & solidorum, è dimensis lateribus, quæ rectæ lineæ sunt.

Quod-

consid. sunt: Vsus, Demonstratio & Consectaria.

Quis est usus 4 & 5. p. 6?

Magnus earum prorsus & excellens Geometriæ usus est in geodæsia rectarum.

Quæ nam est eius demonstratio?

Eam habes in Ramo facilem.

Primò est fabrica duorum triangulorum æquiangulorũ & ad eandem rectam communi puncto comparatorum: in quibus duo latera ad rectũ angulum sunt parallela per 12.e.5. cùm enim rectę sint recta secte, ęquant angulos interiores. Ideoq; alterum latus minoris trianguli & latus maioris ad rectum angulum continuata concurrent. per 1.c.12.e.5.

Secundò demonstratio triplex quòd sint proportionalia cruribus.

Proportio
- 1
  - *Directè.* *Vt e.i. ad i.u. Sic e.a. ad a.y. i. ad i.o. per 5. c.12.e.5.*
  - *Alternè.* *Vt i.o. ad i.u. Sic e.a. ad i.o.*
- 2
  - *Directè.* *Vt y.o. id est, a.i. per 5.c.12.e.5. ad o.u. Sic e.i. ad i.u.*
  - *Alternè.* *Vt e.i. ad a.i. Sic i.u. ad o.u.*
- 3 *Aequeordinatè.* *Vt a.e. ad a.i. Sic o.i. ad o.u.*

Quod ad cõuersam attinet: primò est fabrica triũ triangulorum proportionalium cruribus: duorũ ex thesi, tertij ex fabrica. Deinde est demonstratio duplex, quòd sint æquiangula:

Nam

Nam 1. Vt a. e. ad e. i.
Sic o. u. ad u. y.
2. Vt a. i. ad i. e.
Sic o. y. ad y. u.

Quænam sunt eius consectaria?

I. Si recta in triangulo est parallela basi, desecat triangulum æquiangulũ toti & minus basi. II. Si duæ rectæ intersectæ connectantur rectis parallelis, segmẽta sunt proportionalia. Vitellio 26.p.1. Aequiangula enim triangula fient, ut patet per alternos. III. Si triangula rectangula sunt similia: quadratum à simulutraq; basi æquatur quadratis à simulutrisq; cruribus homologis. Theon 1. Const. Exempli gratia: sunto duo triangula, quorũ unius basis sit 5. latera homologa 3 & 4: alterius basis 10. latera homologa 6 & 8. Quadratũ basis 5 est 25, basis 10 est 100. Quæ simulutraq; faciunt 125. Iam quadratum à latere 3 est 9: à 4 est 16: hoc est coniunctim 25: à latere 6 est 36: ab 8. 64: hoc est coniunctim 100.

Basis

Vna	*Altera*
5	10
5	10
25	100

Crura homologa.

3	4	6	8
3	4	6	8
9	16	36	64
25		100	

Quod nam est secundum elementum?

Si duo triangula sunt proportionalia cruribus æqualis anguli, sunt æquiangula. Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν

γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον: ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ᾽ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι. 6. p.6. Respondet quartæ primi libri ratione triangulorum: quodq́; illa de ratione reliquorũ angulorum ex æqualitate unius anguli & duorum laterum concludit, iſta ſimiliter concludit ex æqualitate unius anguli & proportione duorũ laterum. Pars de homologis lateribus conſectarium eſſe debuit, ut antè: patet enim è demonſtratione reliquorum.

Quod'nam eſt tertium?

Si cruribus proportionalia & alternè parallela, intermedium angulum faciunt: baſes habẽt in rectam continuas. Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται. 32.p.6.

Quot ſunt hîc conſid.?

Tria: Cauſa, Fabrica ſeu diagrãma & Demõſtratio.

Quæ'nam eſt cauſa?

Eſt è 1. c.8.e.5. Nam duos utrinq; facient cum incidente linea duobus rectis æquales.

Quæ'nam eſt demonſtratio?

Duo triangula duos angulos cum incidente linea duobus rectis æquales facientia, baſes habent in rectam continuas. Recta enim inſiſtens in rectam, æquat deinceps angulos. 1. c.8.e.5.

At hîc ſunt duo triangula, duos angulos cũ incidente, duobus rectis æquales facientia.

Hîc igitur triangula baſes habẽt in rectam continuas.

Quottuplex eſt approbatio aſſumptionis?

Triplex.

Quænam eſt prima?

De angulis extremis duobus quòd ſint æquales.

Aequa-

Aequales alterno, sunt æquales inter se.
At anguli duo extremi sunt æquales alterno. per 12.e.5.
Anguli igitur duo extremi sũt æquales inter se.

Quæ'nam est secunda?

Est de totis triangulis quòd sint æquiangula.
Duo triangula proportionalia cruribus æqualis anguli, sunt æquiangula. 10.e.
At hîc sunt duo triangula proportionalia cruribus æqualis anguli.
Ergo hîc duo sunt triangula æquiangula.

Quæ'nam est tertia?

Est de tribus angulis, quod æquales sunt duobus rectis.
Tres anguli æquales tribus angulis trianguli æquantibus duos rectos, æquantur & ipsi duobus rectis.
At hîc tres anguli sunt, per 3. e. æquales tribus angulis trianguli, qui per 9.e.6. duos rectos æquant.
Illi igitur tres anguli ęquantur duobus rectis.

Quod'nam est quartum elementum?

Si habeant unum angulum æqualem, alterum cruribus proportionalem, tertiũ homogeneum: sunt ęquiangula. Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. 7.p.6. Euclides hîc uerbis obscurior est: tria autem ponit, primò ęqualitatẽ anguli unius, secũdò proportionem in cruribus aliorum duorum angulorum, tertiò ut alteri reliquorum angulorum sint homogenei, id est, ambo uel acuti uel obtusi, uel etiam recti. Hîc duo consid. sunt: ut plerumq; Diagramma & Demonstratio.

Quod'nam est diagramma?

Diagramma requirit triangula
- *Aequa angulo.*
- *Proportionalia cruribus angulorum.*
- *Homogenea reliquo angulo.i. ut ambo anguli sint uel*
  - *Acuti*
  - *Obtusi*
  - *Recti*

  Itaq; triplex secundũ hos est demonstratio.

Quæ'nam est demonstratio de acuto?

Si triangula æqua angulo, proportionalia cruribus angulorum, homogenea reliquo angulo sunt; reliqui anguli cruribus proportionales æquantur. Nam,

Si non æquantur: tum si per 5.c.6.c.3. æquetur triangulum triangulo: habebis triangula æquiangula per 1.c.3.e. & angulus æquabitur angulo, acutusq́, erit uterque: & per 9.e. triangula lateribus erũt proportionalia, &c.
At hoc impoßibile.
Illud igitur necesse.

Quæ'nam est demonstratio de vtroq; reliquo vel obtuso vel recto?

Idem prorsus accidet. Pars autem ultima de recto patet per c.3.e.

LIBER VIII. De Generibus triangulorum.

Hactenus de trianguli affectionibus: sequitur eius partitio ex anguli communibus differentijs, recti & obliqui.

Quottuplex est Triangulum?

Duplex: rectangulum uel obliquangulum.

Quid

Quid est Rectangulum?

Quod habet unicum rectum angulum. ἐκ τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. 27.d.1. Rectangulum triangulum in Geometria præcipuas uires habet, & à præstantibus Mathematicis non immeritò magister matheseos appellatur. Vnicus rectus angulus in triangulo esse potest: unicus item obtusus, quoniam etiam recto est maior: at ex uno acuto non appellatur acutangulum: sic enim quoduis triangulum esset acutangulum: sunt enim duo minimùm acuti in omni triangulo: sed acutangulum est triangulum ex omnibus acutis angulis.

Quot'nam hic consid. sunt?

Tria: Consectaria duo, Elementa tria, & Geodæsia triangulorum rectangulorum similium.

Quod'nam est primum consectarium?

Est de fabrica rectanguli. Nam si duæ perpendiculares connectantur, constituent triangulum rectangulum. Hæc fabrica ducta est è definitione recti anguli. Nam,

Perpendiculares rectæ, recti anguli sunt artifices. 8.e.3.

At in triangulo rectangulo sunt perpendiculares rectæ.

In eodem ergo est angulus rectus.

Quod'nam est secundum consectarium?

Si trianguli angulus ad basin rectus est, perpendicularis à uertice est crus alterum.

I. *Quod'nam est primum elementum?*

Si triangulum rectangulũ est æquicrurum: uterq; angulus ad basim est dimidius recti: & contra. Nam quod uterq; dimidius sit recti, hinc patet: quia cũ trianguli tres anguli sint æquales duobus rectis. 9.e.6. sequitur ut cùm in rectangulo unus rectus sit, reliqui duo æquentur alteri recto. Item duo dimidij æquãtur uni recto: ergo unus est dimidius recti. Nam

ut 2 ad 1 ad $\frac{1}{2}$. Deinde ambo dimidij inter se ęquantur. Nam,

Triangulum æquicrurum est in basi æquiangulum. 10.c.6.

At triangulum rectangulum hic est æquicrurum.

Est ergo in basi æquiangulum.

Quot'nam sunt hic consectaria?

Duo. I. Si trianguli angulus æquatur reliquis, est rectus. Nam,

Aequalis dimidio duorum rectorum, est rectus.

At trianguli angulus qui reliquis æquatur, æqualis est dimidio duorum rectorum.

Is igitur angulus est rectus.

Consectarium hoc est è 31.p.3.

II. Si recta à uertice trianguli bisecans basin est ęqualis bisegmēto, angulus uerticis rectus est. Nam primò quòd recta æqualis sit bisegmento, hinc patet quia triangula facit æquicrura. Itaq;,

Recta faciens triangula æquicrura & particulares uerticis angulos æquales extremis: est æqualis bisegmento.

At recta à uertice trianguli bisecans basin, facit triangula æquicrura: & particulares uerticis angulos æquales extremis. per 10. c. 6. Est Iordani. 1.p.

Est ergo æqualis bisegmento.

Deinde quòd uerticis angulus rectus sit: hinc patet:

Trianguli angulus reliquis æqualis, est rectus. 1. c.

At uerticis angulus in triangulo est reliquis æqualis.

Verticis igitur angulus est rectus.

II. Quod-

II. *Quod'nam est secundum elementum?*

Perpendicularis in triangulo ab angulo recto in basin, secat triangula similia toti & inter se. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ: τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστιν τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 8.p.6.

Quot sunt hic consideranda?

Quinque: Fœcunditas, Demonstratio, Vsus, Conuersa, Consectaria.

Quæ'nam est eius fœcunditas?

Insignis est multiplici fœcunditate. In una enim propositione sunt propositiones quodammodo sex: quòd totum sit simile huic parti, quòd illi, quòd partes similes inter se: cęterę tres sunt in duobus consectarijs: de quibus mox.

Quæ'nam est eius demonstratio?

Hæc omnia per duas tantùm propositiones. 32.p.1. & 4.p.6. demonstrantur. Nam primò quòd sint similia toti, hinc constat:

Particularia triangula æquiangula toti, sunt similia toti.

At ista particularia triangula, quæ perpendicularis ab angulo recto in basim secat, sunt æquiangula toti: quia utrinque rectus unus & alter communis. Reliquus igitur æquatur reliquo per 9.e.6. Itaque particularia triangula sunt æquiangula toti, proportionaliaque cruribus æqualium angulorum. per 9.e 7.

Sunt igitur similia toti.

Deinde quòd inter se sint similia, patet hinc:

Figuræ similes eidem, sunt similes inter se 3. c. 14. e. 4.

At particularia ista angula sunt similia eidem toti.

Sunt igitur inter se similia.

Quis

Quis est usus huius elementi?

Permagnus est in dimensionibus planorum. Itaque uidetur in hac una propositione certare demonstrationis elegantia cum doctrinæ fœcunditate, & usus atque utilitas cum utraque.

Est'ne conuersa etiam vera?

Est: Nam secus duæ inæquales essent mediæ proportionales inter easdem datas.

Quot sunt eius consectaria?

Duo. I. Perpendicularis est proportionalis inter segmenta basis. Nam,

Aequaliū angulorū crura sunt proportionalia.
At perpendicularis & segmenta sunt æqualium angulorum crura.
Perpendicularis igitur & segmenta sunt proportionalia.

Hinc Platonis mesographus inuentus est, qui est parallelogrammum rectangulū latere uno mobili per cauum conterminorum laterum: cuius figura est ex Eutocio ad 2.th.2. de sphæra Arch. Platonis autem mechanica sic est: Si duæ datæ rectæ rectę contermınæ infinitè è contermino continuentur; mesographus incidens latere mobili & opposito in principia datarum & angulis in cōtinuatas, intersecabit è continuatis duas continuè proportionales datis.

II. Crus utrumlibet est proportionale inter basim & basis segmentum conterminum. Nam,

Latera quæ subtendunt æquales angulos sunt homologa. 1.c.14.e.4.
At crus utrumlibet & basis segmentum, sunt latera subtendentia æquales angulos.
Sunt igitur homologa.

III. *Quod'nam est tertium elementum?*

Si basis trianguli subtēdit rectum, rectilineum ad eam situm æquatur rectilineis ad crura similibus simili-

militerque ſitis: & contra, Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. 31.p.6.

Quot ſunt hîc conſideranda?

Tria: Singularitas, Improprietas & Demõſtratio.

Quæ nam eſt eius ſingularitas?

Propoſitio hæc Proclo uidetur ad 47.p.1. generalis & reuera eſt in primis genere ipſo nobilis, ſed nobilior etiam demonſtratione breui & facili. Mirum tamen eſt hanc propoſitionem licet generalem nuſquam ferè appellari. 47. p. 1. ſpecialem infinitis locis citari. Sed ſpecialis quadratorum uſus id efficit.

Quæ nam eſt eius improprietas?

Ter loquitur impropriè hîc Euclides. I. Cùm formam nominat pro triangulo aut triangulato: id enim ſolidis corporibus conuenire nõ poteſt. Nec enim cubus baſis æquatur cubis crurum, ut in lateribus trianguli 3.4.5. eſt manifeſtum. Ergo non quælibet forma hîc compræhendi poteſt. II. Cùm dicit à ſubtendente illud figura pro figura comparata ſubtendenti. III. Cùm ait ſimiliter deſcriptũ, quod nihil ad Geometriam facit, nec ſitus omninò reſpondet, cùm primum triangulatum planum poſſit eſſe horizonti, cùm reliqua ſublime erigantur, neq; omninò differentiæ ſitus reſpondent.

Quæ nam eſt eius demonſtratio?

Primò fiat diagramma trianguli rectanguli: deinde duo triangula ad crura: tertiò ijs ſimile ſimiliterque ſitum ad baſim per 4.c.14.e.4. Hoc tertium duobus illis æquatur. Sit enim ab anguſo recto perpendicularis: hæc oſtendet proportionales bis ternas per 2.c.4.e. Itaque,

Vt baſis tota eſt ad maius ſegmentum: ſic triangulum baſis totius, eſt ad triangulum maioris cruris. Et ut baſis tota eſt ad minus ſegmentum:

mentum: sic triangulum basis totius est ad triangulum minoris cruris: per 1. c. 15. e. 4.

At basis tota æquatur duobus segmentis: suis nempe partibus.

Quare per secundam compositionem in Arithmetica lib. 2. cap. 9. triangulum basis, æquatur triangulis crurum.

Quomodo demonstratur conuersa?

Primò ponitur diagramma. Sit triangulum rectangulum & perpendicularis erigatur super crure minore, æqualis ipsi cruri maiori, & connectatur, cū basi. Hîc iam duo consid. sunt: Aequalitas, & Angulus rectus. Nam per præcedentem sita ad o e & e a rectilinea, id est, per fabricam ad a e & i e æquantur rectilineo ad a o simili & similiter sito, & ex thesi æquantur simili & similiter sito ad a i. Itaque ad o a & a i similia rectilinea cùm sint æqualia, homologa latera babebunt æqualia, per 1. c. 14. e. 4. & triangula duo fient æquilatera, & per 1. e. 7. æquiangula. Rectus autem est ex fabrica o. e. a. cui æqualis concluditur a. e. i. Itaque a. e. i. per 8. e. 5. est rectus.

Quid'nam est triangulum obliquangulum?

Quod nullum habet rectum angulum. Estq; obtusangulum uel acutangulum. Hæc partitio est è specialibus anguli differentijs.

Quid est obtusangulum?

Quod unum habet obtusum angulum. ἀμβλυγώνιον τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. 28. d. 1. Rectus unicus est in triangulo, itaq; & obtusus.

Quot sunt hic consectaria?

Tria. I. Si obtusus angulus est ab basin, perpendicularis à uertice cadit extra. Nam si esset rectus

ad ba-

ad basin perpendicularis esset crus alterum, ut patet.2.c.2.e.

II. Si trianguli angulus sit maior reliquis, est obtusus. Nam si æquaretur reliquis esset rectus. 1.c.3.e.

III. Si recta à uertice trianguli bisecans basin, est minor bisegmento, angulus uerticis obtusus est. Nā si ęqualis esset, esset rectus.2.c.3.e.

Quid est triangulum acutangulum?

Quod habet omnes acutos angulos. ὀξυγώνιον τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.29.d.1.

Quot sunt hic consectaria?

Tria. I. Perpendicularis à uertice cadit intra: patet per 2.c.2.e.

II. Si trianguli angulus sit minor reliquis, est acutus: ut patet per 1.c.3.e.

III. Si recta à uertice trianguli bisecans basim est maior bisegmento, angulus uerticis acutus est: ut patet per 2.c.3.e.

LIBER IX. De Geodæsia rectarum è triangulis rectangulis similibus.

Quis est usus in hac Geometria triangulorum rectangulorum similium?

Hæc Geometria cum plerosque alios usus habet, tum in primis Geodæsiam linearum rectarum suppeditat & magisterium Geometriæ in triangulis rectangulis antea collocatum, tandem uerum hic esse depræhendetur. Continebit enim geodæsiam rectarum, posteaque geodęsiam planorum & solidorum, è dimensis lateribus, quæ rectæ lineæ sunt.

Quod-

Quod'nam instrumentum adhibetur ad rectarum geodæsiam?

Radius, omniũ geometricorum instrumẽtorum præstantissimum & commodissimum.

Quid est radius?

Est norma crurum inæqualium. Instrumentum perantiquum est & uulgò baculus Iacob dicitur, tanquam à sancto patriarcha illo iam olim inuentus sit. Et sanè radius non solùm metiendis terris, sed astris loco & ordine definiẽndis; omnibusque cœlestis ciuitatis regionibus ac uijs describendis præcipuè usurpatur:& sic utrumque usum Virgilius eleganter expressit Eclog. 3.

——ecquis fuit alter
Descripsit radio totum qui gentibus orbem?

Et 6. Aeneid.

—— cœliq; meatus
Describent radio & surgentia sidera dicent.

Radius lineas, proindeq; superficies & corpora metietur: lineæ longitudinem, latitudinem, altitudinem, modò statione unica, modò duplici metietur. Atque hac arte (nempe dimensis per lineas rectas lateribus) areas triangulorum è dimidio collectorum dati trianguli laterũ metietur. Triangulata seu quadrangula seu multangula componuntur è triangulis. Radius itaq; metiendis triangulorum areis, metietur & areas triangulatorum. Radius idem metiendis diametris perimetros, proindeq; & areas circulorũ semicirculorũ, sectorum, sectionũ metietur. Radius etiã totas soliditates corporũ metietur: basi & altitudine dimensis planũ parallelepipedi prismatis corpus concludet: hinc etiã pyramidem tertiam nempe partẽ, & ordinata corpora reliqua è componentibus pyramidibus metietur: cylindrũ prismatis, conum pyramidis simillima mensura, indeq; sphæram & sphærica segmenta metietur.

Quot

Quot sunt consid. in Radio?

Duo: Fabrica & Vsus. In Fabrica consid. partes ut crura, fistulæ & pinnę.

Quot sunt crura radij?

Duo: Index & Transuersarium. Index est duplus sesquidecimus transuersarij. Transuersarium est per indicem uolubile modò sublimius, modò humilius. Vt si transuersarium sit 10 partium, index sit 21. Transuersariū itaq; sit 2000. index erit 4200. aut si illud 1000 partium sit, hic erit 2100.

Quot sunt fistulæ radij?

Quinq;: Prima indicis, secunda transuersarij ut uoluatur & per indicem & per se sursum deorsumq; ad rectos ita contiguis, ut ore alterno latus alterius contingatur: tertia est uolubilis per totum transuersarium, ideoq; cursor appellatur: quarta & quinta fixæ & immobiles transuersarium terminant ad tertiam & secundam æquealtę pinnis, ad opticam lineam (ubi opus erit) disterminandum & tanquam certis in transuersario punctis definiendum. Tres primę fistulæ cochleis sistentur, ubi res exiget.

Quot sunt pinnæ?

Quatuor: Vna cursoris, reliquæ transuersarij; quarum duæ extremæ sunt fixæ, media est mobilis.

Quot sunt in usu consideranda?

Duo: Communia & Specialis mensura.

Quæ nam sunt communia?

I. Iusta distantia: nec enim uisus est infinitus. II. Obductus oculus: uis enim optica è duobus oculis in unum conducta firmius collimat. III. Radius ad os genæ applicatus: hic enim oculus est tanquā centrum circuli, cui inscriptum sit transuersarium. IIII. Manus quietæ: nam si trepidēt, geodæsiæ proportio turbabitur. V. Stationis locus à medio pedis. VI. Si uisus est ab initio cruris alterius, est per terminum reliqui: crusq; alterum est tectum metiendæ magni-

tudini,reliquum parallelum. Terminus autem est qui linea uisus efficitur,siue extremapinna, siue quo cunq; alio loco cursor.

Quottuplex est mensura?

Triplex: Longitudinis,Altitudinis,Latitudinis.

I. *Quottuplex est Longitudinis?*

Triplex: Est enim distantiæ uel simplicis è data altitudine:uel duplicis.Illa est prima aut secunda.

Quánam est dimensio longitudinis prima?

Si uisus sit ab initio indicis recti in metam longitudinis, erit ut segmentum indicis ad segmentum transuersarij,sic mensoris altitudo ad longitudinem Theorema Euclidis in Opticis. Idem autem metiendi modus est è loco inferiore & altiore. Ex inferiore ita:

Vt segmentum indicis à uertice ad transuersarium,est ad segmentum transuersarij ab indice ad opticam lineã: ita est index (qualis hic esto mensoris altitudo) ad longitudinem: Sunt enim duo triangula equiangula,ideoq; proportionalia cruribus.9.e.7.

At segmentum indicis ad trãsuersarium, quod est 6 partium:ad segmentum transuersarij ab indice ad opticã lineam, quod est 18 partiũ, est in tripla ratione.

Ergo & altitudo, quæ est quatuor pedum, ad longitudinem: quæ erit 12 pedum, erit tripla.Nam ut 6 ad 18:ita 4 ad 12. Sunt igitur triangula similia & ideo.

Si bini anguli duorum triangulorum æquantur,reliqui æquantur.c.3.e.7.

At hìc bini æquantur:sunt enim duo recti.

Reliqui igitur æquantur, ex quibus unus est cõmunis,reliquus æquatur reliquo.

Ex loco altiore ita.

Vt segmentum indicis est ad segmentum transuersa-

uersarij : ita erit mensoris altitudo ad longitudinem.

At segmentum indicis 5 partium, ad segmentū transuersarii 6 partium, est in ratione sesquiquinta $1\frac{1}{5}$.

Ergo & altitudo quæ est 10 pedum, ad longitudinem, quæ erit 12 pedum: erit sesquiquinta. Nam, ut 5 ad 6. ita 10 ad 12.

Neq; uerò quicquam interest, utrum lõgitudo sit in subiecto plano an in ascensu descẽsúue montis. Hoc modo poteris metiri latitudines fluminum, ualliū, fossarum. Longitudo enim semper est hoc modo, ut in mari distantiam nauium liceat metiri: quomodo & Thales Milesius apud Proclum 26. p. 1. metitur. Deinceps in dimensione longitudinis & altitudinis uisus est in metam altitudinis.

Quænam est secunda longitudinis dimensio?

Si uisus sunt ab initio indicis paralleli, erit ut segmentum transuersarij ad segmentum indicis, sic data altitudo ad longitudinem.

At segmentum trãsuerarij 120. partium, ad segmentum indicis 210 partium: est in ratione supertriquarta $1\frac{3}{4}$.

Ergo & altitudo quæ est pedum 400. ad longitudinem, quæ erit pedum 700: erit supertriquarta. Nam ut 120. ad 210. ita 400. ad 700.

Demonstratio par est superioribus uel etiam facilior. Sunt enim triangula æquiangula, ut prius.

Quænam est tertia dimensio longitudinis?

Est per duplicem distantiam, ubi transuersarium si recedendi copia sit maior, deprimetur in secunda distantia. Itaq; si uisus sit ab initio transuersarij paralleli, erit ut in indice differentia maioris segmen-

ti ad minus, sic differentia secundæ distantiæ ad lõgitudiuem.

Quot sunt hîc collimationes?

Duæ: Prima ab initio transuersarij & è quæsita longitudine per terminum indicis in metam altitudinis. Secunda ab initio transuersarij è distantia maiore per terminum indicis in eandem metam.

Quomodo hîc peracta est dimensio?

Sumpta differentia maioris segmenti à minore. Demonstratio sic est: In prima distantia ab initio transuersarij ducatur parallela contra secundæ distantiæ lineam quæ est in metam altitudinis. Hîc primùm amputatur secundum segmentum indicis primæ distantiæ, & æquatur segmento indicis secundæ distantiæ. Nam,

Triangula, æqualia binis angulis æqualis cruris: sunt æquilatera. 2. e. 7.

At hîc duo sunt triangula, ęqualia crure per thesin (quia transuersarium eodem suo loco manet) & anguli bini sunt æquales, nempe duo recti, & exterior interiori.

Hîc igitur duo triangula sunt æquilatera.

Hinc deinde geodæsia tertia sumitur. Vt enim differentia primi segmenti est ad secundum segmentum: sic intercapedo inter punctum metæ altitudinis & parallelam primæ distantiæ: est ad intercapedinem eiusdem parallelæ ad lineam transuersarij: ut æquatio ternorum graduum ostendit. Nam,

Duo triangula æquiangula, sunt proportionalia cruribus. 9. e. 7.

At hîc duo sunt triangula æquiangula.

Sunt igitur proportionalia cruribus.

Itaq; ut differẽtia primi segmenti est ad intersegmẽtum parallelæ in transuersarij initium: sic intercapedo inter punctum metæ altitudinis est ad parallelam in initium transuersarij. Et ut intersegmentum

paral-

parallelæ in initium transuersarij est ad secundum segmentum: sic parallela est ad intercapedinem inter ipsam & lineã transuersarij. Itaq; ex æquo, ut differentia est ad secundum segmentum: sic intercapedo inter metam & parallelam, est ad intercapedinem inter parallelam & lineam transuersarij: & per 8.e.6. sic differentia secundæ distantiæ ad longitudinem. Nam,

Recta in triangulo, perallela basi, secat crura proportionaliter. 8.e.6.
At hîc linea recta est parallela basi.
Secat igitur crura proportionaliter. Itaq;
Vt est differentia primi segmenti ad secundum segmentum: ita differentia secundæ distantiæ, est ad longitudinem quæsitam.
At hîc differentia primi, quæ est partium 36. est ad segmentum secundum, quod est partium 72. in ratione dupla.
Igitur & differentia secundæ distantiæ, quæ est pedum 40: est ad longitudinem quæsitã, quæ est pedum 80: in ratione dupla. Nam ut 36. ad 72: ita 40. ad 80.

Qualis est hîc altitudo?

Hîc altitudo nulla definitè datur: ut faciat ullum principis proportionis terminum. Altitudo tamen, licet dimensionis ignotæ, est quæsitæ longitudinis terminus: ideoq; adiumẽto ad ratiocinationẽ quæstionis: quia perpendiculariter insistens extremę longitudini intelligitur.

Quando est locus huic tertiæ geodæsiæ?

Hæc geodæsia est sæpè necessitatis, cum superiore neutro modo longitudo capi potest: interiecto quippe uel muri uel arboris uel montis impedimento: ut meta longitudinis uideri nequeat, qui primus modus est: neq; altitudo contermina extremæ longitudini data sit, qui secundus est modus. Nam,

Longitudo uideri
- Potest, & altitudo data extremæ longitudini contermina
  - Non est.
  - Est.
- Non potest.

II. *Quottuplex est altitudinis dimensio?*

Est itidem triplex & similis. Est enim distantiæ uel simplicis è data longitudine, partéue altitudinis: uel duplicis. Illa item est prima aut secunda.

Quid est altitudo?

Est perpendicularis à uertice magnitudinis ad solum mensoris: quomodo definita est altitudo 6.e.4.

Quænam est prima geodæsia altitudinis?

Si uisus sit ab initio transuersarij recti, erit ut segmentum transuersarij ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem. Deducitur è 18.th.3. Euclidis in Opticis ubi Euclides umbra solis utitur pro radio optico, qui nunc adhibetur. Itaq;,

Duo triangula æquiangula, sunt proportionalia cruribus.9.e.7.
At hic sunt duo triangula æquiangula.
Sunt igitur proportionalia cruribus. Ergo,
Vt segmentum transuersarij est ad segmentum indicis, sic data lõgitudo est ad altitudinem.
At segmentum transuersarij, quod est 60 partium: est ad segmentum indicis, quod est 36 partium: in ratione superbitertia $1\frac{2}{3}$.
Ergo & data longitudo 120 pedum, est ad altitudinem 72 pedum, in eadem ratione. Vt enim 60 ad 36: ita 120 ad 72 per auream regulam. Sed additur mensoris altitudo, quæ si sit quatuor pedum, altitudo tota erit 76.

Quænam

Quænam est geodesia in euersa altitudine?

Si uisus sit ab initio indicis paralleli, erit ut segmẽtum transuersarij ad segmentum indicis, sic data longitudo ad altitudinem: E' conclusa nempe altitudine subducto quod supereminet, relinquetur altitudo. Theorema est 20 In Euclidis opticis, de dimẽsione putei, rupis, turris. Itaq;,

Vt segmentum transuersarij est ad segmentum indicis, ita data longitudo ad altitudinem.

At segmentum transuersarij 5 partium, ad segmentum indicis 13 partium, est in ratione dupla supertriquinta $2\frac{3}{5}$.

Ergo & diameter putei (quæ modò est pro longitudine) 10 pedum: quę supernè sumatur ꝓ æquali fundo: ad oppositam altitudinem (quæ per 9.e.7. & auream regulam est 26 pedum) est in eadem ratione. Nam ut 5 ad 13: ita 10 ad 26. Sed ex 26 tollendo segmentum indicis supra oram putei, relinquetur uera altitudo: ut si segmentum illud 13 partium, ualeat 2 pedes, altitudo erit pedum 24.

Quænam est secunda altitudinis dimensio?

Si uisus sit ab initio indicis recti, erit ut segmentum indicis ad segmentum transuersarij, sic data longitudo ad altitudinem. Vt si indicis segmentum est 60 partium, transuersarij segmẽtum item 60: longitudo data 250 pedes: tum per auream regulam altitudo erit etiam 250 pedum. Vt enim segmentum indicis ad segmentum trãsuersarij, sic linea longitudinis ad perpendicularem altitudinis, per 9.e.7. Sed inuẽtæ altitudini altitudo mensoris addenda est: quæ si sit 4. pedum, tota altitudo erit 254 pedum. Et hic modus à superiore distat solo radij situ.

Quódnam est hîc consectarium?

Est de altitudinis nota parte unde reliquũ cognoscatur. Nam si uisus sit ab initio indicis recti per pinnas transuersarij in terminos notæ partis, erit ut interuallum pinnarum ad reliquum supereminentis transuersarij, sic nota pars ad reliquam. Nam ut interuallum pinnarum ad partem lineæ intermediæ: sic pars nota ad totam lineam intermediam, per 9. e. 7. & ut pars lineæ intermediæ ad reliquum supereminentis transuersarij, sic tota linea intermedia ad reliquam partem: & ex æquo,

Vt interuallum pinnarum ad reliquum transuersarij, sic nota pars ad reliquam. Hîc habes terminos tres proportionis.

At interuallum pinnarum 20 partium, ad reliquum transuersarij 30 partium, est in ratione sesquialtera $1\frac{1}{2}$.

Ergo nota pars 15 pedum, ad reliquam $22\frac{1}{2}$. pedum, erit in eadem ratione. Nam ut 20 ad 30: ita 15 ad $22\frac{1}{2}$.

Quænam est tertia altitudinis dimensio?

Si uisus sit ab initio indicis recti, erit ut in indice differentia segmenti ad differentiam distantiæ, sic segmentum transuersarij ad altitudinem. Huc reuocatur subtilitas quæ fuit in tertia geodæsia longitudinis. Est autem hîc duplex distantia.

Quod igitur sunt hîc collimationes?

Duæ: Prima ab initio indicis perpendicularis & è longitudine ignota per terminum transuersarij in metam altitudinis & segmentum indicis. Secunda ab initio eiusdem indicis & è maiore distantia per terminum transuersarij in eandem metã, & segmentum indicis.

Quo-

Quomodo hîc peracta est dimensio?

Vt antea, sumpta differentia maioris segmenti supra minus.

Quæ nam est demonstratio?

Demonstratio concluditur, ut antea. In secunda distantia, à differentia maioris segmenti indicis ducatur parallela contra primæ distantiæ lineam, quę est in metam altitudinis. Hîc primùm amputatur segmentum maius indicis secundæ distantiæ, & æquatur segmento indicis primæ instantiæ. Nam,

Triangula, æqualia binis angulis æqualis basis: sunt æquilatera. 2. e. 7.

At hîc duo sunt triangula, æqualia basi, id est, segmento transuersarij (nam id in utraq; distantia idem manet) & anguli bini sunt æquales, nempe duo recti & exterior interiori.

Sunt igitur æquilatera: ideoq; indicis segmenta æqualia.

Iam reliquum sorite quatuor gradum concluditur. Vt y r ad y u, sic per 9. e. 7. s r, id est o u ad e i & ut o u ad e i, sic a u, id est. l r ad a i. Itaq; reliqua y l ad reliquam ẏ a erit ut tota y r ad totam y i: ideoq; de primo ad ultimum, sicut s r ad e i. Itaq;:

Vt in indice differentia segmenti ad differentiam distantiæ est: ita est segmentum transuersarij ad altitudinem.

At hîc differentia indicis 23 partium, ad differentiam 30 pedum, est in ratione superpartiente septem uicesimas tertias $1\frac{7}{23}$.

Ergo & segmentum transuersarij partium 44: ad altitudinem pedum. $57\frac{2}{23}$. est in eadem ratione. Vt enim 23 ad 30: ita 44 ad $57\frac{2}{23}$.

Quódnam est hîc consectarium?

E' geodæsia altitudinis patet differentia duarum altitudinum: Nam cum utramq; sumpseris per ali-

quem antecedentium modorum, tolle minorem à maiore. Hinc igitur inæqualium turrium altera, alterius altitudinem licet metiri: hoc est uel è minore maiorem, uel è maiore minorem.

Quomodo è minore?

Primò è minore sumatur longitudo per primum modum, quia altitudo minoris (in qua es) facilis est uel perpendiculo uel modo aliquo superiorum. Tũ metire altitudinem, quæ supra minorem est & adde minori: habebis totius altitudinem per primum aut secundum modum. Demonstratur per 9.e.7. Nam ut segmentum indicis ad segmentum transuersarij, ita longitudo ad altitudinem.

Quomodo è maiore?

Si uisus primum à uertice maioris, deinde à basi uel medio loco per pinnam transuersarij, sit in uerticem minoris altitudinis, erit ut sunt dictæ partes indicum ad partes primi indicis, sic altitudo intra stationes ad suum excessum supra quæsitam altitudinem. Sunto enim partes indicum 12 & 6. summaque 18. ad 12: sic altitudo 190. pedum ad excessum, 12 $\frac{2}{3}$. pedum. Reliquum igitur 63 $\frac{1}{3}$. erit altitudo quæsita.

Licétne etiam è uertice turris metiri distantiam turrium inter se?

Licet. Primus enim modus est metiendæ longitudinis, neq; quicquam hic differt, nisi quòd radius extra datam altitudinem suspenditur. Demonstratio est per 9.e.7. Nam,

Duo triangula æquiangula, sunt proportionalia cruribus.
At hîc duo sunt triangula æquiangula.
Sunt igitur proportionalia cruribus: Vt ergo est segmentum indicis ad segmentum transuersarij, sic est data altitudo ad longitudinẽ.

III. Quot-

III. *Quottuplex est dimensio Latitudinis?*

Est simplex. Itaq; si uisus sit ab initio indicis recti per pinnas transuersarij in terminos latitudinis, erit ut in indice differentia segmenti ad differentiam distantiæ, sic interuallũ pinnarum ad latitudinem. Exempla duo sunt: ex loco tum inferiore tum supero: in utroque duo rursus considerantur, figura & demonstratio.

Quot considerantur in figura?

Duo: Collimatio duplex & Triangulorum proportio. Nam,

Triangula, æqualia binis angulis æqualis basis: sunt æquilatera. 2. e. 7.

At hic duo sunt triangula æqualia binis angulis exteriore & interiore & æqualis basis per thesin (quia hic segmentum transuersarij idem manet) itaq; crus alterum æquatur altero.

Sunt igitur æquilatera.

Quæ nam est demonstratio?

His positis redit ferè demonstratio tertiæ altitudinis.

Quæ nam est geodæsia è loco supero?

Est eadem.

LIB. X. De Triangulato & parallelogrammo.

Quid nunc sequitur?

Hactenus dictum est de geodæsia linearum rectarum, è triangulis rectangulis, sequitur de triangulato.

Quid est triangulatum?

Est rectilineum compositum è triangulis. Et primò triangulati latera sunt binario plura triangulis. Vt quadranguli latera sunt 4, triangula ipsum quadrilate-

drilaterum componentia: 2 : Quinquanguli latera 5,triangula 3.Sexanguli latera ſex,triangula 4 & ſic deinceps.Et quidem minimum illud eſt,poteſt enim uel triangulũ ſecari in triangula quamlibet multa. Quot autem angulis rectisinteriores atq; exteriores æquentur in quolibet rectilinei genere,patuit 4.e.6. Nam quod ad interiores attinet,

Trianguli tres anguli ſunt æquales duobus rectis.9.e.6.

At in quadrangulo ſunt duo triangula:in quinquangulo tria:in ſexangulo quatuor.

In quadrangulo igitur ſunt bis terni anguli ſeu quatuor recti : in quinquangulo ſunt ter terni anguli ſeu ſex recti:in ſexangulo ſunt quater terni anguli ſeu octo recti.

Exteriores autem in quolibet rectilineo æquantur 4.rectis:per 1.e.8.e.5.

Deinde triangulata homogenea ſecantur in triangula æqua numero . τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τρίγωνα τὸ πλῆθος ἴσα διαιρεῖται. è.20.p.6.Non demonſtratur,quia eſt è compoſitione rectilinei triangulati conſectarium : Nam ſi quadrangula ſint, ſecantur in bina : ſi quinquangula,in terna:ſi ſexangula in quaterna, & ſic deinceps.

Tertiò triangulata ſimilia ſecantur in triangula ſimilia inter ſe & homologa totis . τὰ ὅμοια πολύγωνα διαιρεῖται εἰς τρίγωνα ὅμοια καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις.è 20.p.6.

Quottuplex eſt hîc demonſtratio?

Duplex,de ſimilitudine & homologia.

Quomodo demonſtratur ſimilitudo?

Prima pars de ſimilitudine particularium triangulorum probatur de duobus extremis per 6. p.6.& de medijs per 4. p. 6. Nam quod ad duo extrema attinet,

Duo triangula æquiangula ſunt ſimilia.9.e.7.

At hîc

At hîc duo sunt triangula æquiangula. Nam,

Duo triangula proportionalia cruribus æqualis anguli: sunt æquiangula. 10.e 7.
At hîc duo sunt triangula proportionalia cruribus æqualis anguli.
Hæc igitur duo triangula sunt æquiangula.

Hæc igitur duo triangula sunt similia. Atq; ita de reliquis.

Quod autem ad media attinet,
Duo triangula æquiangula sunt similia. 9.e.7.
At hîc duo media sunt æquiangula: nam detractis æqualibus angulis, reliquos æquales angulos habebunt.
Duo igitur medio sunt similia.

Quomodo demonstratur homologia?

Quod singula sint homologa totis, sic probatur:
Quæ sunt in eadem ratione, sunt proportionalia.

At hîc terna triangula sunt in eadē ratione: quia sunt similia. Nam

Plana in duplicata ratione homologorum laterum, sunt similia, 3.e.6.
At hîc terna triangula sunt in duplicata ratione homologorū laterum.
Hîc igitur terna triangula sunt similia.

Hîc igitur terna triangula sunt proportionalia: & per tertiam compositionem lib.2.Arithm. cap.9: ut unum antecedentium ad unum consequen-

sequentium, sic totum quinquangulum ad totum. 12.p.5.& 12.p.7.

Atq; hæc communiter de triangulato: sequitur eius partitio.

Quottuplex est triangulatum?

Duplex: Est enim quadrangulum aut multangulum. Ab angulis species nominantur, quamuis à lateribus esset uerius, ut quadrilaterum aut multilaterum.

Quid est quadrangulum?

Quod comprænenditur à quatuor lineis rectis. τετράπλευρον σχῆμά ἐστιν τὸ ὑπὸ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενον. 22.d.1.

Quottuplex est?

Duplex: Parallelogrammum aut trapezium.

Quid est Parallelogrammum?

Est quadrangulum lateribus oppositis parallelũ. Hæc definitio ab Euclide in definitionum catalogo præterita est & ex ea facta est 33.& 34.p.1. Attamen sic ad 36.p.1. ad 4.& 10.p.6. parallelogrammi definitio assumitur ab Euclide.

Quot sunt consid. in Parallelogrammo?

Tria: Definitionis consectaria, Partes & Species.

I. *Quot sunt definitionis consectaria?*

Quinq;.

Quódnam est primum?

Si rectæ eadem parte conterminent ęquales & parallelas, parallelogrammum constituent. Nam,

Aequales & parallelæ, parallelogrammum cõstituunt: ut definitio parallelogrammi habet.

At rectæ quæ eadem parte conterminant æquales & parallelas, sunt ęquales & parallelę per 5.c.12.e.5.

Rectæ igitur illæ, parallelogrammum constituunt.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὗται ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. 33.p.1.

Cur dixit eadem parte, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη;

Quia dimetientes duæ possunt diuersis partibus æquales simul & parallelas coniungere, neq; tamen parallelæ erunt.

Quæ'nam est eius demonstratio?

Demonstratio fit per.29.4.& 27.p.1. At proprietas hîc est protinus ex ipsa parallelarũ definitione. Connectentes enim ideò sunt æquales, quia sunt distantiæ æqualium parallelarum: & parallelæ uicissim sunt, quia parallelis æqualibus distant. Atq; ex hac materia definiendum & fabricandum parallelogrãmum fuerat, & certè ab Euclide uel Theone ipso definitio parallelogrammi hinc assumitur ad 34.35.36. & deinceps ad 4 & 9.p.6: Parallelogrammum nempe esse quadrilaterum lateribus oppositis parallelum: ut testimonio Euclidis uel Theonis pateat hîc materiam esse postulati, non propositionis demonstrabilis.

Quid Proclus de hac?

Initio quarti libri ad hanc propositionem hæsitans in parallelogrammi definitione, ait in hac propositione tradi *γένεσιν* parallelogrammi, ideoq; propositionem hanc esse *μεθόριον* confinium parallelarum & parallelogrammorum, & tanquam constituto & definito parallelogrammo Euclidem protinus ad parallelogrammi proprietatem accedere.

Quod'nam est secundum?

Parallelogrammum oppositis & lateribus & angulis & sectis diametro segmentis æquatur. *Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί: καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.* 34.p.1.

Quot sunt partes huius consectarij?

Tres: Prima est quòd in parallelogrammo opposita latera sint æqualia. Nam,

Vbi parallelæ conterminant parallelas, opposi-
tæ æquantur, per c.5.12.e.5.
At in parallelogrãmo duæ rectæ parallelæ con
terminant æquales parallelas.
In parallelogrammo igitur oppositæ æquan-
tur.

Secunda est de angulis æqualibus: id quod diagonius ostendit: facit enim triangula æquilatera, ideoq; æquiangula: cumq; particulares anguli sint æquales, totus toti æquatur.

Tertia est de segmentis, quæ semper æqualia sunt, siue triangula sint siue quadrangula quælibet. Diameter enim bisecat parallelogrammum per angulos aut per latera bisecta, aut per alrerna laterum segmenta æqualia.

Quot sunt hîc uitia in Euclidis propositione?

Tria: I. Tautologia inanis, quia prima pars de laterum æqualitate præsumpta est in 33. p. 1. & parallelogrammi definitio è superiore propositione assumitur. II. Quia è principio indemonstrabili, ut in proximo, propositionem demonstrabilem fecit. Nã si dixeris parallelogrammũ est quadrilaterum lateribus oppositis parallelum: consectarium erit: ideò ex opposito erit æquilaterum & æquiangulum & dimetiente sectum bifariam. Itaq;,

Si speciales definitiones in principijs fuerunt,
generalis etiam in principijs erit.
At illud. Nam ista æqualitas laterum & angulorum oppositorum principij materies Euclidi
fuit in specialibus definitionibus quadrati,
oblongi, rhombi, rhomboidis.
Ergo & hoc.

III. Quòd dimetiente bifariam secari parallelogrãmum in principijs non posuit. Nam,

Si circulum dimetiente bifariam secari, princi-
pium

pium eſt, principium etiam erit parallelogrammum bifariam ſecari.

At illud Euclidi principium fuit.

Hoc igitur principium non erit? imò principiũ erit, ſed altioris & magis communis loci. Eſt enim cõmune cum triangulo, cum parallelogrammo, cum ellipſi. Itaq; principiũ hic tanto antiquius fuerit, quanto parallelogrammũ antiquius eſt circulo, planarum quippe figurarum ultima.

Quod nam eſt tertium?

Diameter parallelogrãmi biſecatur radijs æqualibus. Id etiam cum rotundo commune eſt, ut patuit 17. e.4. Neq; tamen diametri perpetuò biſecantur radijs æqualibus.

Quod nam eſt quartum?

Eſt de comparatione in ratione æqualitatis parallelogrammi cum triangulo. Parallelogrammum eſt duplum trianguli baſi & altitudine æqualis. Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. 41.p.1. Nam,

Biſectum diametro in duo triangula, eſt duplum dimidij.

At parallelogrammum biſecatur diametro in duo triangula: per antecedentem.

Parallelogrammum igitur duplum eſt dimidij.

Quod nam eſt quintum?

Parallelogrammum ęquatur triangulo ęquealto, baſiq; duplo. è 42.p.1. Nam,

Dimidijs æqualibus, tota erunt æqualia.

At dimidium parallelogrammi, æquatur dimidio trianguli æquealti, baſique dupli.

Totum igitur parallelogrammum ęquatur triangulo æquealto, baſique duplo.

Hinc licet dato triangulo in dato angulo rectilineo

parallelogrammum æquale constituere. τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.42.p.1.

II. Quot sunt partes Parallelogrammi?

Tres: Constat enim è binis & diagonalib. & complementis & gnomonibus.

Quid est diagonale?

Est particulare parallelogrammũ communis anguli & diagonij cum toto parallelogrammo. Hæc definitio diagonalis confusa est ab Euclide 24. & 26. p.6. ubi etiam τὰ περὶ διάμετρον παραλληλόγραμμα describit, quæ nos diagonália uno nomine nominámus. Diagonalis nulla ratio uel proportio proponitur, sed tantùm similitudo.

Quænam est similitudo diagonalis cum toto?

Diagonale est toti simile similiterq; situm. παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα, ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.24.p.6. Propositio hîc triplex est, prima quòd primum diagonale sit simile toti, secunda quòd secundum, tertia quòd primum tertiumque sint similia inter se. Nos in duas partes diuisimus: quòd utrumque diagonale sit simile toti, & quòd similiter situm. Nam Euclides similem situm hîc omisit, quem tamen in 26 conuersa adhibet: unde indicatur eũ hîc fuisse comprehẽsum.

Quomodo demonstratur prior pars?

Quod de primo diagonali demonstratur, idem & de secundo. Itaque,

Parallelogramma æquiangula & proportionalia cruribus æqualium angulorum, sunt similia.

At diagonalia & totum parallelogrammum sunt parallelogrãma æquiangula & proportionalia cruribus æqualium angulorum. Aequiangula sunt per 2. c. 5. e. & per 12. c. 5.

Pro-

Proportionalia autem ſunt per 9. c. 7. & 12. e. 5.

Diagonalia igitur particularia & parallelogrãmum totum ſunt ſimilia.

Quomodo demonſtratur altera pars?

Similis ſitus patet per 2.c.14.e.4. Nam,

Vbi termini proportionales ſimili ſitu reſpondent, figuræ ſimiliter ſitæ ſunt.

At in diagonalibus & parallelogrãmo toto termini proportionales ſimili ſitu reſpondent.

Diagonale igitur ſi toti militer ſitum eſt.

Atque hinc etiam patet diagonale quadrati quadratum, oblongi oblongum, rhombi rhombum, rhomboidis rhomboides eſſe: quia toti ſimile ſimiliterque ſitum.

Quid hinc ſequitur?

Quòd diagonalia ſint ſimilia inter ſe & ſimiliter ſita. Nam,

Similia eidem & ſimiliter ſita, ſunt ſimilia inter ſe & ſimiliter ſita.3.c.14.e.4.

At diagonalia ſunt ſimilia eidem toti, & ſimiliter ſita.

Diagonalia igitur ſunt ſimilia inter ſe & ſimiliter ſita.

Quænam eſt hic conuerſa?

Quartæ & uiceſimæ propoſitionis ſexti conuerſa quædam eſt. 26. p. 6. & indicat ei defuiſſe differentiam ſimilis poſitionis & communis anguli, quę hic modò conuertuntur.

Quomodo habet ſe iſta conuerſa?

Si particulare parallelogrammum eſt toti coangulum, & ſimile ſimiliterq; ſitum: eſt diagonale. ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ: περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.26.p.6.

Quomodo demonstratio?

Aſſumi hoc potuit. Nam,

Parallelogrammum toti ſimile, ſimiliterque ſitum eſt diagonale. 24. p. 6.

At particulare parallelogramum eſt toti coangulum & ſimile ſimiliterq; ſitum.

Particulare igitur parallelogrammum eſt diagonale. 26. p. 6.

Sed etiam, ut ab Euclide, cogi poteſt: Nam,

Si particulare parallelogrammum non eſt diagonale: pars æquatur toti.

At hoc impoſſibile.

Illud igitur neceſſe.

Cur ſimilis ſitus exprimi debet?

Quia poteſt diagonale, quod fuit, immutari in ipſo parallelogrammo, ut ſimile & coangulum remaneat, nec tamen ſit ſimiliter ſitum, nec præterea diagonale. Quare ſimilis ſitus hîc neceſſariò exprimendus eſt.

Quid eſt complementum?

Eſt particulare parallelogrammum à conterminis diagonalium lateribus compræhenſum. Dicitur autem complementum, quia cum diagonalibus totum parallelogrammum complet. Neque uerò duo diagonalia deſcribi poſſunt, quin unà complementa deſcribantur. Euclides nuſquam complementum definit, ſed 43. p. 1. appellat τὰ τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων παραπληρώματα. Complementorum nulla proportio, nulla ſimilitudo proponitur, ſed tantùm ratio.

Quænam eſt ratio complementorum?

Complementa ſunt ęqualia. παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 43. p. 1. Nam,

Detractis æqualibus ab æqualibus, reliqua erunt æqualia.

At in

At in parallelogrammo & diagonalibus binis, ter bina triangula ſunt æqualia.

Bis igitur bina circū diagonium triangula detracta, relinquunt complementa æqualia.

Quot nam ſunt hic conſectaria?

Duo, I, Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo: reliquum ad datam rectam comparatum, eidem pariter ęquabitur: παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 44. p. 1. Nam parallelogrammū triangulo ęquatum eſt in eadem baſi & in iiſdem parallelis. per 5.c.6.e. Hæc propoſitio antiquum inuentum eſt & Pythagoreæ Muſæ proprium, in quo Proclus expoſuit accuratè quid eſſet, παραβάλλειν comparare. Cùm datum ſpatium toti datæ rectæ applicatur, tunc ſpatium illud dicitur comparari, at ſi ſpatium data recta maius ſit, tum dicitur ὑπερβάλλειν excedere: ſi minus ſit, ἐλλείπειν deficere dicitur. Sic ueteribus παραβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις nomina planorum erant datæ rectę ęqualiter uel inęqualiter applicatorum & comparatorum, ut hic Euclides & in ſexto libro ad 27.28.29. p. Quæ recentioribus facta ſunt nomina linearum conicarum.

II. Si parallelogramma continenter æquentur triangulis dati triangulati in dato angulo rectilineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur. τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 45. p. 1. Proclus ait hoc problema ſuperioribus proximis duobus eſſe καθολικώτερον: quia complementis utitur: neque triangulo tantùm, ſed cuilibet rectilineo parallelogrammum æquat. Ac conſectarium ſpeciale potius eſt ex utroque: nec rectilineo ſimpliciter parallelogrammum hic æquatur, ſed trianguli

rectilineum componentibus. Nec aliud hîc proponitur quàm quod 44.p.1. nisi quòd illic recta datur, quæ hîc libera est.

Quis est vsus huius propositionis?

Hæc una propositio est pro trapezijs & multilateris omnibus: nec enim in dimetiendis hisce figuris alia est in elementis geometria, præter istam rectilinei ad parallelogrammum reductionem. Tum enim si parel[illegible]grammum rectangulum sit, multiplicatio longitudinis per latitudinem, aream metitur. Itaque angulus hîc datus assumendus est rectus ut dimensionis geometria procedat. Proclus putat mathematicos ista propositione excitatos ad inquirendam quadraturam circuli: quia parallelogrammo æquaretur rectilineum, cui circulus adeò finitimus sit. Archimedi autem uisus est circulus æqualis triangulo rectangulo, cuius unum recti anguli latus sit æquale radio, basis perimetro.

Quænam est comparatio totius parallelogrammi cum suis diagonalibus & complementis?

Parallelogrammum æquatur suis diagonalibus & complementis.

Quid est Gnomon?

Est alterum diagonale cum duobus complementis. παντὸς παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω. 2.d.2. Gnomonis autem usus in elementis nullus alius uidetur, quàm ut uno eius nomine tres partes parallelogrammi (diagonale, complementum, gnomo) significentur. Alioqui gnomo est perpendiculum.

Quænam est comparatio parallelogrammorum?

I. Parallelogramma æquealta sunt ut bases. τὰ παραλ-

παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. 1. p. 6. Nam,

Figuræ primæ æquealtæ, sunt ut bases.

At parallelogramma sunt æquemultiplicia primarum: quia sunt dupla triangulorum, figurarum primarum.

Parallelogramma igitur æquealta, sunt ut bases: si basis æqualis, æquale: si maior, tanto maius: si minor, tanto minus.

Quod'nam est hinc consectarium?

Parallelogramma æquealta in æquali basi, sunt æqualia. τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἢ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 35. & 36. p. 1. In ijsdem autem parallelis esse, & quod 6 libro dicitur, esse in eadem altitudine: idem est. Altitudo enim figuræ est perpendiculum à uertice ad basim.

At Euclides hic elenchum sophisticum facit. Nam,

Qui ambiguè loquitur, elenchum committit.

At Euclides hic ambiguè loquitur. Nam parallelas easdem & parallelas æqualis interualli, id est, eandem & æqualem altitudinem non accipit pro eodem: sicuti neque eandem & æqualem basim: diuersas enim propositiones hic instituit: nimirum 35. & 36. Denique iam Euclidis iudicio, quæ sunt in eisdem parallelis, sunt æquealta, non contra: cum æquealta quædam sint in diuersis parallelis.

Euclides igitur elenchum committit: atque hic sophisticus sermo faciet quamuis inæqualia parallelogramma, attamen æqualia.

Quæ nam est demonstratio in prima specie de eadem basi?

Demonstratio Euclidis apud Proclum in prima spe-

ſpecie ſit per 6 axioma. Nam,

Quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt duplicia. axio. 6.

At parallelogramma in eadem baſi, ſunt eiuſdem duplicia.

Sunt igitur inter ſe duplicia.

Quam'nam habet cauſam illa æqualitas?

Iſta parallelogrammorum æqualitas admirabilem cauſam habet, quæ nequaquam illo cōparationis argumento, quo Euclides & Theon uſi ſunt, oſtenditur. Nam cùm latitudo & longitudo ſint æquales, æquales planos numeros hinc effici neceſſe eſt. Id in magnitudine ſecus eſt. Nā parallelogrammorum ex æquali etiā longitudine & latitudine deſcriptorū eſt inequalitas admirabilis. Cauſa uerò eſt è lateribus & angulis rectis. Etenim (ait Proclus) angulorum rectitudo & laterum æqualitas totum poteſt ad earum amplificationem uel imminutionem: nec æqualitas angulorum omnium cum omnibus iſta cauſa eſt. Omnes enim parallelogrammorū quatuor interiores, ſunt æquales quatuor rectis, ideoq; quaterni ſemper æquales. Rectitudo (inquam) angulorum cum laterum æqualitate id efficit. Ergo parallelogramma in eadem baſi, & iiſdem parallelis ſunt æqualia, licet latera ualdè ſint inæqualia. Demonſtratio autem Euclidis triangulis duplicatis eadèm conueniet: ſi quis curioſus generali cauſa (quam ſequimur) contentus non erit.

Quænam eſt demonſtratio in altera ſpecie de æqualibus baſibus?

Eſt ex 1 axiomate:

Eidem tertio æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

At duo parallelogramma in æqualibus baſibus, ei-

bus, eidem tertio sunt æqualia.

Sunt igitur inter se æqualia.

Theon assumit 33. p. 1. pro definitione parallelogrammi.

Quod habet opposita latera æqualia & parallela, est parallelogrammum.

At tertium assumptum habet opposita latera æqualia & parallela.

Ergo est parallelogrammum. Hinc verò etiam datur triangulum æquale triangulo in dato angulo.

II. Si parallelogramma æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia, & contra. 15. p. 6. Consectarium est ex 8. e. 7. Nam,

Triangula æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt æqualia.

At parallelogramma æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt æquemultiplicia triangulorum æqueangulorum reciprocorum cruribus æqualis anguli.

Parallelogramma igitur æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt ęqualia.

Et tamen & illud & hoc consectarium potius est. 13. e. 4. Nam,

Figuræ primæ reciprocæ basi & altitudine sunt æquales.

At triangula sunt figuræ primæ: & parallelogramma sunt æquemultiplicia triangulorum.

Triangula igitur & parallelogramma reciproca basi & altitudine, sunt æqualia.

Quot sunt hîc consectaria?

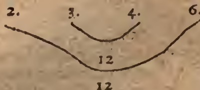
Duo. I. Si quatuor rectæ sunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum. ἐὰν τέσσαρες εὐ-

θεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 16.p.6. Nam,

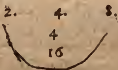
Parallelogramma æquiangula, reciproca cruribus æqualis anguli, ſunt æqualia.

At parallelogrammum mediarum è 4 & 3 rectis proportionalibus & parallelogrammum extremarum è 2 & 6 rectis proportionalibus ſunt æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli.

Parallelogrammum igitur mediarum æquatur æquiangulo extremarum: ut ſuprà 8.c.7.



II. Si tres rectæ ſint proportionales, parallelogrammum mediæ æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ: καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 17.p.6. Conſectarium eſt è proximo. Vt,



LIBER

LIBER XI. De Rectangulo.

Quot sunt species parallelogrammi?

Duæ: Rectangulum & obliquangulum,

Quid est Rectangulum?

Est parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos. Atque hinc intelligitur ex uno angulo recto omnes rectos esse. Nam,

Anguli oppositi in parallelogrammo, æquantur. 2.c.6.e.10.

At a & i sunt oppositi anguli in parallelogrammo rectangulo.

A & i igitur æquantur, & igitur ambo recti. Nam.

Anguli recticruri æquales, sunt recti. c.8.e.3.

At a & i sunt anguli recticruri æquales.

A igitur & i sunt recti.

Reliqui anguli ad e & o sunt æquales duobus rectis. Nam,

Quatuor anguli in quadrangulo æquantur quatuor rectis. 4 c.6.

Ergo duo æquantur duobus rectis.

Sunt item æquales inter se. Nam,

Anguli oppositi in parallelogrammo, æquantur. 2.c.6.e.10.

At e & o sunt oppositi anguli in parallelogrammo rectangulo.

Igitur e & o æquales inter se sunt. Itaque singuli recti.

Neque omnino in parallelogrammo rectus angulus esse potest, quin omnes recti sint.

Quot sunt hic consectaria?

Duo. I. Rectangulum comprehenditur à duobus rectis angulum rectum comprehendentibus. *πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.* 1, d.2.

Quot

Quot sunt hîc consideranda?

Tria. Verbum περιέχεσθαι, Accuratio definitionis, Postulatio.

Quid significat verbum περιέχεσθαι?

Significat quandam Geometricam multiplicationem. Compræhensio enim περιοχὴ geometrica in rectangulis, arithmeticæ multiplicationis similis est, & sic fieri numerus è numeris inter se multiplicatis dicitur, quo rectangulum è duabus rectis compræhendi. Itaque & numerus rectanguli hîc est interpres & planus pro rectangulo appellatur ab Euclide in libris Arithmeticis. Vt enim è duobus numeris inter se multiplicatis fit numerus: sic è duobus lateribus in se ductis fit rectangulum: nec tamen rectangulum quodlibet est rationale, sed tantum parallelogrammum, ut patuit antea. 9. e. 4. & postea patebit. 5. e.

Qualis est Euclidis definitio?

Non est satis accurata: docet enim non quid sit rectangulum, sed quomodo fiat, nempe rectæ lineæ ductu in lineam, sicuti fluxu puncti antea recta & peripheria facta est. Rectè tamen & ordine ab Euclide illo loco posita est, nimirum ante parallelogramma.

Qualis est postulatio?

Mirum est hîc rectanguli fabricam postulari ab Euclide, cùm antea fabrica parallelogrammi & quadrati demonstrata sit.

II. Rectangula quatuor complent locum. Nam,
Figuræ quæ nihil inane relinquunt, complent locum. 16. e. 4.
At 4 rectangula nihil inane relinquunt.
Complent igitur locum. Item,
Figuræ in plano efficientes quatuor rectos, cōplent locum.
At 4 rectāgula efficiūt in plano quatuor rectos.
Complent igitur locum.

Neque

Neque omnino intereſt, ęqualia, inæqualia, æquilatera, inæquilatera, homogenea, heterogenea ſint quatuor. Quoquo modo enim uerſentur, anguli recti erunt: ideoq; complebunt locum.

Quot ſunt generalia hîc elementa?

Quatuor. I. Si diameter biſecat latus rectanguli, rectè ſecat: & contra. Nam,

Si diameter in triangula æquilatera & æquiangula ſecat: rectè ſecat.

At ſi biſecat, in triangula æquilatera & æquiangula ſecat, quod patet per 1.e.7. ductis diagonijs ſegmentorum.

Si igitur biſecat, rectè ſecat.

Conuerſa patet per 2.e.7. & 10.e.6. Nam,

I. Si diameter ſecat rectangulum, in triangula æquilatera, biſecat latus rectanguli.

At cùm rectè ſecat, in triangula æquilatera ſecat per 2. e. 7. Aequantur angulis duobus æquicruris: & binis æqualis tum cruris, tum baſis duorum.

Cùm igitur rectè ſecat, biſecat latus rectãguli.

II. Si diameter rectangulum in triangula æquicrura, & in baſi æquiangula ſecat, biſecat latus rectanguli.

At cùm rectè ſecat, in triangula æquicrura & in baſi æquiangula ſecat, per 10.e.6.

Cùm igitur rectè ſecat, biſecat latus rectanguli.

Quod nam eſt huius conſectarium?

Si inſcripta rectè, biſecat latus rectanguli, eſt diameter. Nam,

Biſecans parallegrammum, eſt diameter. per 2. c.6.e.5.

At inſcripta rectè, biſecat parallelogrammum.

Inſcripta igitur eſt diameter.

II. *Quod nam eſt ſecundum elementum?*

Eſt de generali rectangulorũ inter ſe cõparatione.

Rectan-

Rectangulum æquatur rectangulis ex ipsius uno latere, & reliqui segmentis. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δὴ ποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. 1.p.2.

Quænam est demonstratio huius elementi?

Si istud elementum præter numeros aliquid demonstrationis requirit, è congruentia demonstrari potest, quia totum partibus congruit. Itaq;,

Totum æquatur partibus, quia eis congruit.
At rectangulum est totum.
Rectangulum igitur æquatur particularibus rectangulis.

Sed; eadem ratio in numeris clarior est inductione partium. Vt,

Quater octona, sunt 32. Hic est totum.
At quater quina.i.20. & quater terna.i.12. sunt quater octona. Nam 8 frango in 5 & 3, & utrumq; per 4 multiplico. Hic sunt partes.
Itaque quater quina & quaterna.i. 20. & 12. sunt 32.

Denique tota arithmetica multiplicatio ex totis numeris idem facit, ac multiplicatio totius per alterius partes imò partium per partes. Hæc propositio appellatur 9.cap.1.constr. à Ptolemæo.

Qualis est Theonis demonstratio?

Theon hîc mirificus demonstrator est. Tanquam enim problema positum esset ad constituendum figuram & constitutam demonstrandū: ita hîc & perpendiculis & parallelis figuram constituit, & constitutam talem esse demonstrat. Verùm,

Theorema, postulatur & conceditur.
At hîc est Theorema propositum de figurarum positarum & concessarum æqualitate.
Id igitur postulandum & concedendum erat: nec aliud hîc allegari poterat, quàm totum

æquari partibus, aut conuenire: ideoque æquari.

Deinde, primò rectangulum ex integris rectis propositis conficiendum & proximè rectangula ex insecta & alterius segmentis conficienda erant.

Sed translatio linearum nónne erat Mathematicis indigna?

At Euclidi ista ἐφαρμόσεις principium fuit. 4 & 8. p. 1. Sed illud uidelicet erat, nulla demonstratio fuisset. Res enim per se clarissima erat ex illo principio, Totum partibus æquari aut conuenire. Itaque ex alijs lineis figura fuit instituenda, quæ probaretur æqualis propositæ.

III. *Quod'nam est tertium?*

Si quatuor rectæ sint proportionales, rectangulum mediarum ęquatur rectangulo extremarum. 16. p. 6. Est è. 1. c. 14. e. 10. sed frequenter speciale consectarium hoc appellatur nomine rectanguli.

IIII. *Quod'nam est quartum?*

Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus. 16. d. 7. Figura rationalis definita est. 9. e. 4. qualis è rectilineis adhuc nulla fuit: prima est parallelogrammum rectangulum neque quodlibet, sed illud solum, cuius basis altitudini est rationalis, ratioque basis & altitudinis explicabilis est numero. Rectangulum autem ex irrationalibus lateribus, qualia. 8. e. i. dicta sunt, est irrationale. Rationale itaque rectangulum è rationalibus lateribus accipitur & eius figuratus nomine generis appellatur planus, quia è toto planorum genere hæc sola species est rationalis. Si igitur rectanguli basis est 6. altitudo 4. podismus seu area est 24. per multiplicationem laterum: & si constet aream esse 24. & basim 6 esse; constabit altitudinem esse 4 per diuisionem areę per basim.

Quid

Quomodo demonstratio?

Aſſumi hoc potuit. Nam,

Parallelogrammum toti ſimile, ſimiliterque ſitum eſt diagonale.24.p.6.

At particulare parallelogramum eſt toti coangulum & ſimile ſimiliterq; ſitum.

Particulare igitur parallelogrammum eſt diagonale.26.p.6.

Sed etiam, ut ab Euclide, cogi poteſt: Nam,

Si particulare parallelogrammum non eſt diagonale: pars æquatur toti.

At hoc impoſſibile.

Illud igitur neceſſe.

Cur ſimilis ſitus exprimi debet?

Quia poteſt diagonale, quod fuit, immutari in ipſo parallelogrammo, ut ſimile & coangulum remaneat, nec tamen ſit ſimiliter ſitum, nec præterea diagonale. Quare ſimilis ſitus hìc neceſſariò exprimendus eſt.

Quid eſt complementum?

Eſt particulare parallelogrammum à conterminis diagonalium lateribus compræhenſum. Dicitur autem complementum, quia cum diagonalibus totum parallelogrammum complet. Neque uerò duo diagonalia deſcribi poſſunt, quin unà complementa deſcribantur. Euclides nuſquam complementum definit, ſed 43.p.1. appellat τὰ τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων παραπληρώματα. Complementorum nulla proportio, nulla ſimilitudo proponitur, ſed tantùm ratio.

Quænam eſt ratio complementorum?

Complementa ſunt ęqualia. παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 43.p.1. Nam,

Detractis æqualibus ab æqualibus, reliqua erunt æqualia.

At in

At in parallelogrammo & diagonalibus binis, ter bina triangula sunt æqualia.

Bis igitur bina circũ diagonium triangula detracta, relinquunt complementa æqualia.

Quot' nam sunt hîc consectaria?

Duo. I. Si complementum alterum æquatur dato triangulo in dato angulo rectilineo: reliquum ad datam rectam comparatum, eidem pariter æquabitur: παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 44. p. 1. Nam parallelogrammũ triangulo æquatum est in eadem basi & in iisdem parallelis. per 5. c. 6. e. Hæc propositio antiquum inuentum est & Pythagoreæ Musæ proprium, in quo Proclus exposuit accuratè quid esset, παραβάλλειν comparare. Cùm datum spatium toti datæ rectæ applicatur, tunc spatium illud dicitur comparari, at si spatium data recta maius sit, tum dicitur ὑπερβάλλειν excedere: si minus sit, ἐλλείπειν deficere dicitur. Sic ueteribus παραβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις nomina planorum erant datæ rectæ æqualiter uel inæqualiter applicatorum & comparatorum, ut hîc Euclides & in sexto libro ad 27. 28. 29. p. Quæ recentioribus facta sunt nomina linearum conicarum.

II. Si parallelogramma continenter æquentur triangulis dati triangulati in dato angulo rectilineo, totum parallelogrammum toti triangulato pariter æquabitur. τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 45. p. 1. Proclus ait hoc problema superioribus proximis duobus esse καθολικώτερον: quia complementis utitur: neque triangulo tantùm, sed cuilibet rectilineo parallelogrammum æquat. Ac consectarium speciale potius est ex utroque: nec rectilineo simpliciter parallelogrammum hîc æquatur, sed trianguli

rectilineum componentibus. Nec aliud hic proponitur quàm quod 44.p.1. nisi quòd illic recta datur, quæ hic libera est.

Quis est vsus huius propositionis?

Hæc una propositio est pro trapezijs & multilateris omnibus: nec enim in dimetiendis hisce figuris alia est in elementis geometria, præter istam rectilinei ad parallelogrammum reductionem. Tum enim si parallelogrammum rectangulum sit, multiplicatio longitudinis per latitudinem, aream metitur. Itaque angulus hic datus assumendus est rectus ut dimensionis geometria procedat. Proclus putat mathematicos ista propositione excitatos ad inquirendam quadraturam circuli: quia parallelogrammo æquaretur rectilineum, cui circulus adeò finitimus sit. Archimedi autem uisus est circulus æqualis triangulo rectangulo, cuius unum recti anguli latus sit æquale radio, basis perimetro.

Quænam est comparatio totius parallelogrammi cum suis diagonalibus & complementis?

Parallelogrammum æquatur suis diagonalibus & complementis.

Quid est Gnomon?

Est alterum diagonale cum duobus complementis. παντὸς παραλληλογράμμου χωρίου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι, γνώμων καλείσθω. 2.d.2. Gnomonis autem usus in elementis nullus alius uidetur, quàm ut uno eius nomine tres partes parallelogrammi (diagonale, complementum, gnomo) significentur. Alioqui gnomo est perpendiculum.

Quænam est comparatio parallelogrammorum?

I. Parallelogramma æquealta sunt ut bases. τὰ

παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. 1.p.6. Nam,

Figuræ primæ æquealtæ, sunt ut bases.

At parallelogramma sunt æquemultiplicia primarum: quia sunt dupla triangulorum, figurarum primarum.

Parallelogramma igitur æquealta, sunt ut bases: si basis æqualis, æquale: si maior, tanto maius: si minor, tanto minus.

Quod nam est hinc consectarium?

Parallelogramma æquealta in æquali basi, sunt æqualia. τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ἢ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 35. & 36. p. 1. In ijsdem autem parallelis esse, & quod 6 libro dicitur, esse in eadem altitudine: idem est. Altitudo enim figuræ est perpendiculum à uertice ad basim.

At Euclides hic elenchum sophisticum facit. Nam,

Qui ambiguè loquitur, elenchum committit.

At Euclides hic ambiguè loquitur. Nam parallelas easdem & parallelas æqualis interualli, id est, eandem & æqualem altitudinem non accipit pro eodem: sicuti neque eandem & æqualem basim: diuersas enim propositiones hic instituit: nimirum 35. & 36. Denique iam Euclidis iudicio, quæ sunt in eisdem parallelis, sunt æquealta, non contra: cum æquealta quædam sint in diuersis parallelis.

Euclides igitur elenchum committit: atque hic sophisticus sermo faciet quamuis inæqualia parallelogramma, attamen æqualia.

Quæ nam est demonstratio in prima specie de eadem basi?

Demonstratio Euclidis apud Proclum in prima

ſpecie fit per 6 axioma. Nam,

Quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt duplicia. axio. 6.

At parallelogramma in eadem baſi, ſunt eiuſdem duplicia.

Sunt igitur inter ſe duplicia.

Quam'nam habet cauſam illa æqualitas?

Iſta parallelogrammorum æqualitas admirabilem cauſam habet, quæ nequaquam illo cōparationis argumento, quo Euclides & Theon uſi ſunt, oſtenditur. Nam cùm latitudo & longitudo ſint æquales, æquales planos numeros hinc effici neceſſe eſt. Id in magnitudine ſecus eſt. Nā parallelogrammorum ex æquali etiā longitudine & latitudine deſcriptorū eſt inæqualitas admirabilis. Cauſa uerò eſt è lateribus & angulis rectis. Etenim (ait Proclus) angulorum rectitudo & laterum æqualitas totum poteſt ad earum amplificationem uel imminutionem: nec æqualitas angulorum omnium cum omnibus iſta cauſa eſt. Omnes enim parallelogrammorū quatuor interiores, ſunt æquales quatuor rectis, ideoq́; quaterni ſemper æquales. Rectitudo (inquam) angulorum cum laterum æqualitate id efficit. Ergo parallelogramma in eadem baſi, & iiſdem parallelis ſunt æqualia, licet latera ualdè ſint inæqualia. Demonſtratio autem Euclidis triangulis duplicatis eadem conueniet: ſi quis curioſus generali cauſa (quam ſequimur) contentus non erit.

Quæ'nam eſt demonſtratio in altera ſpecie de æqualibus baſibus?

Eſt ex 1 axiomate:

Eidem tertio æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

At duo parallelogramma in æqualibus baſibus, ei-

bus, eidem tertio sunt æqualia.

Sunt igitur inter se æqualia.

Theon assumit 33. p. 1. pro definitione parallelogrammi.

Quod habet opposita latera æqualia & parallela, est parallelogrammum.

At tertium assumptum habet opposita latera æqualia & parallela.

Ergo est parallelogrammum. Hinc uerò etiam datur triangulum æquale triangulo in dato angulo.

II. Si parallelogramma æquiangula reciprocantur cruribus æqualis anguli, sunt æqualia, & contra. 15. p. 6. Consectarium est ex 8. e. 7. Nam,

Triangula æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt æqualia.

At parallelogramma æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt æquemultiplicia triangulorum æqueangulorum reciprocorum cruribus æqualis anguli.

Parallelogramma igitur æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli, sunt æqualia.

Et tamen & illud & hoc consectarium potius est. 13. e. 4. Nam,

Figuræ primæ reciprocæ basi & altitudine sunt æquales.

At triangula sunt figuræ primæ: & parallelogramma sunt æquemultiplicia triangulorum.

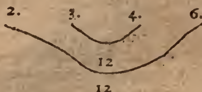
Triangula igitur & parallelogramma reciproca basi & altitudine, sunt æqualia.

Quot sunt hîc consectaria?

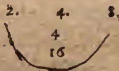
Duo. I. Si quatuor rectæ sunt proportionales, parallelogrammum mediarum æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum. ἐὰν τέσσαρες εὐ-

θεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 16.p.6. Nam,

Parallelogramma æquiangula, reciproca cruribus æqualis anguli, ſunt æqualia.
At parallelogrammum mediarum è 4 & 3 rectis proportionalibus & parallelogrammum extremarum è 2 & 6 rectis proportionalibus ſunt æquiangula reciproca cruribus æqualis anguli.
Parallelogrammum igitur mediarum æquatur æquiangulo extremarum: ut ſuprà 8.e.7.



II. Si tres rectæ ſint proportionales, parallelogrammum mediæ æquatur æquiangulo parallelogrammo extremarum. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ: καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 17.p.6. Conſectarium eſt è proximo. Vt,



LIBER

LIBER XI. De Rectangulo.

Quot sunt species parallelogrammi?

Duæ: Rectangulum & obliquangulum,

Quid est Rectangulum?

Est parallelogrammum quod habet omnes angulos rectos. Atque hinc intelligitur ex uno angulo recto omnes rectos esse. Nam,

Anguli oppositi in parallelogrammo, æquantur. 2. c. 6. e. 10.

At a & i sunt oppositi anguli in parallelogrammo rectangulo.

A & i igitur æquantur, & igitur ambo recti. Nam.

Anguli recti cruri æquales, sunt recti. c. 8. e. 3.

At a & i sunt anguli recti cruri æquales.

A igitur & i sunt recti.

Reliqui anguli ad e & o sunt ęquales duobus rectis. Nam,

Quatuor anguli in quadrangulo æquantur quatuor rectis. 4. e. 6.

Ergo duo æquantur duobus rectis.

Sunt item æquales inter se. Nam,

Anguli oppositi in parallelogrammo, æquantur. 2. c. 6. e. 10.

At e & o sunt oppositi anguli in parallelogrammo rectangulo.

Igitur e & o æquales inter se sunt. Itaque singuli recti.

Neque omnino in parallelogrammo rectus angulus esse potest, quin omnes recti sint.

Quot sunt hic consectaria?

Duo. I. Rectangulum comprehenditur à duobus rectis angulum rectum compræhendentibus. *πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.* 1, d. 2.

Quot

Quot sunt hic consideranda?

Tria. Verbum περιέχεσθαι, Accuratio definitionis, Postulatio.

Quid significat verbum περιέχεσθαι?

Significat quandam Geometricam multiplicationem. Comprehensio enim περιοχὴ geometrica in rectangulis, arithmeticæ multiplicationis similis est, & sic fieri numerus è numeris inter se multiplicatis dicitur, quo rectangulum è duabus rectis comprehendi. Itaque & numerus rectanguli hîc est interpres & planus pro rectangulo appellatur ab Euclide in libris Arithmeticis. Vt enim è duobus numeris inter se multiplicatis fit numerus: sic è duobus lateribus in se ductis fit rectangulum: nec tamen rectangulum quodlibet est rationale, sed tantum parallelogrammum, ut patuit antea. 9. e. 4. & postea patebit. 5. e.

Qualis est Euclidis definitio?

Non est satis accurata: docet enim non quid sit rectangulum, sed quomodo fiat, nempe rectæ lineæ ductu in lineam, sicuti fluxu puncti antea recta & peripheria facta est. Rectè tamen & ordine ab Euclide illo loco posita est, nimirum ante parallelogramma.

Qualis est postulatio?

Mirum est hîc rectanguli fabricam postulari ab Euclide, cùm antea fabrica parallelogrammi & quadrati demonstrata sit.

II. Rectangula quatuor complent locum. Nam,

Figuræ quæ nihil inane relinquunt, complent locum. 16. e. 4.

At 4 rectangula nihil inane relinquunt.

Complent igitur locum. Item,

Figuræ in plano efficientes quatuor rectos, cōplent locum.

At 4 rectāgula efficiūt in plano quatuor rectos.

Complent igitur locum.

Neque

Neque omnino intereſt, ęqualia, inæqualia, æquilatera, inæquilatera, homogenea, heterogenea ſint quatuor. Quoquo modo enim uerſentur, anguli recti erunt: ideoq; complebunt locum.

Quot ſunt generalia hîc elementa?

Quatuor. I. Si diameter biſecat latus rectanguli, rectè ſecat: & contra. Nam,

Si diameter in triangula æquilatera & æquiangula ſecat: rectè ſecat.

At ſi biſecat, in triangula æquilatera & æquiangula ſecat, quod patet per 1.e.7. ductis diagonijs ſegmentorum.

Si igitur biſecat, rectè ſecat.

Conuerſa patet per 2.e.7.& 10.e.6. Nam,

I. Si diameter ſecat rectangulum, in triangula æquilatera, biſecat latus rectanguli.

At cùm rectè ſecat, in triangula æquilatera ſecat per 2. e. 7. Aequantur angulis duobus æquicruris: & binis æqualis tum cruris, tum baſis duorum.

Cùm igitur rectè ſecat, biſecat latus rectãguli.

II. Si diameter rectangulum in triangula æquicrura, & in baſi æquiangula ſecat, biſecat latus rectanguli.

At cùm rectè ſecat, in triangula æquicrura & in baſi æquiangula ſecat, per 10.e.6.

Cùm igitur rectè ſecat, biſecat latus rectanguli.

Quod nam eſt huius conſectarium?

Si inſcripta rectè, biſecat latus rectanguli, eſt diameter. Nam,

Biſecans parallegrammum, eſt diameter. per 2. c.6.e.5.

At inſcripta rectè, biſecat parallelogrammum.

Inſcripta igitur eſt diameter.

II. *Quod nam eſt ſecundum elementum?*

Eſt de generali rectangulorũ inter ſe cõparatione.

Rectan-

Rectangulum æquatur rectangulis ex ipsius uno latere, & reliqui segmentis. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὁσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν, ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.1.p.2.

Quæ nam est demonstratio huius elementi?

Si istud elementum præter numeros aliquid demonstrationis requirit, è congruentia demonstrari potest, quia totum partibus congruit. Itaq;,

Totum æquatur partibus, quia eis congruit.
At rectangulum est totum.
Rectangulum igitur æquatur particularibus rectangulis.

Sed; eadem ratio in numeris clarior est inductione partium. Vt,

Quater octona, sunt 32. Hic est totum.
At quater quina.i.20. & quater terna.i.12. sunt quater octona. Nam 8 frango in 5 & 3, & utrumq; per 4 multiplico. Hic sunt partes.
Itaque quater quina & quaterna.i. 20. & 12. sunt 32.

Denique tota arithmetica multiplicatio ex totis numeris idem facit, ac multiplicatio totius per alterius partes imò partium per partes. Hæc propositio appellatur 9.cap.1.constr. à Ptolemæo.

Qualis est Theonis demonstratio?

Theon hic mirificus demonstrator est. Tanquam enim problema positum esset ad constituendum figuram & constitutam demonstrandū:ita hic & perpendiculis & parallelis figuram constituit, & constitutam talem esse demonstrat. Verùm,

Theorema, postulatur & conceditur.
At hic est Theorema propositum de figurarum positarum & concessarum æqualitate.
Id igitur postulandum & concedendum erat: nec aliud hic allegari poterat, quàm totum

æquari

æquari partibus, aut conuenire: ideoque æquari.

Deinde, primò rectangulum ex integris rectis propositis conficiendum & proximè rectangula ex insecta & alterius segmentis conficienda erant.

Sed translatio linearum nonne erat Mathematicis indigna?

At Euclidi ista ἐφαρμόσις principium fuit. 4 & 8. p. 1. Sed illud uidelicet erat, nulla demonstratio fuisset. Res enim per se clarissima erat ex illo principio, Totum partibus æquari aut conuenire. Itaque ex alijs lineis figura fuit instituenda, quæ probaretur æqualis propositæ.

III. *Quod'nam est tertium?*

Si quatuor rectæ sint proportionales, rectangulum mediarum æquatur rectangulo extremarum. 16. p. 6. Est è. 1. c. 14. e. 10. sed frequenter speciale consectarium hoc appellatur nomine rectanguli.

IIII. *Quod'nam est quartum?*

Figuratus rectanguli rationalis appellatur planus. 16. d. 7. Figura rationalis definita est. 9. e. 4. qualis è rectilineis adhuc nulla fuit: prima est parallelogrammum rectangulum neque quodlibet, sed illud solum, cuius basis altitudini est rationalis, ratioque basis & altitudinis explicabilis est numero. Rectangulum autem ex irrationalibus lateribus, qualia. 8. e. 1. dicta sunt, est irrationale. Rationale itaque rectangulum è rationalibus lateribus accipitur & eius figuratus nomine generis appellatur planus, quia è toto planorum genere hæc sola species est rationalis. Si igitur rectanguli basis est 6. altitudo 4. podismus seu area est 24. per multiplicationem laterum: & si constet aream esse 24. & basim 6 esse; constabit altitudinem esse 4 per diuisionem areæ per basim.

Quid

Quid hinc patet?

Geodæsia rectanguli trianguli. Nam cùm crura recti anguli inter se multiplicaueris, facis totum parallelogrammum rectangulum, cuius dimidium est triangulum per 4.c.6.c.10. Nam,

> Parallelogrammum est duplum trianguli basi & altitudine æqualis.
>
> Triangulum igitur est dimidium parallelogarmmi.

Huc referre placet id quod Plutarchus scribit in libro de Iside. Τοῦ ἑξκαίδεκα τετραγώνου καὶ τοῦ ὀκτωκαίδεκα ἑτερομήκους (οἷς μόνοις ἀριθμοῖς ἐπιπέδων συμβέβηκε τὰς περιμέτρους ἴσας ἔχειν περιεχομένοις ὑπ' αὐτῶν χωρίοις) μέσος ὁ τῶν ἑπτακαίδεκα παρεμπίπτων, ἀντιφράττει καὶ διαζεύγνυσιν ἀπ' ἀλλήλων, καὶ διαιρεῖ τὸν ἐπόγδοον λόγον εἰς ἄνισα διαστήματα τεμνόμενος.

4
4 | 16 | 4
4

8. 9
17

6
3 | 18 | 3
6

$\frac{9}{8}$ ($1\frac{1}{8}$ $\frac{18}{16}$ ($1\frac{1}{8}$

LIBER XII. De Quadrato.

Quot sunt species rectanguli?

Duæ: Quadratum & oblongum.

Quid est Quadratum?

Est rectangulum æquilaterum. τῶν τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον. 30.d.1. Nam,

Quadran-

Quadrangulum æquilaterum & ęquiangulum est ordinatum.7.e.4.

At quadratum est quadrangulum ęquilaterum æquiangulum.

Quadratum igitur est ordinatum.

Latinè uerò distinctius, quadratum dicitur, quàm Græcè τετράγωνον, id est, quadrangulum; quod generale & quadrilateris omnibus commune est. Græca uerò hîc synechdoche est generalis nominis pro speciali, idq; propter excellentiam figuræ & perfectionem, qua etiam prouerbio quadratus uir bonus dicitur, & sic quadrati boues Columellæ thorosi & membris apti. At Latini distinctius eam speciem quadratum uocant. Potest enim quadrangulũ esse quinquelaterum, uno quippe latere introrsum reiecto: & multo maior numerus laterum esse potest numero angulorum, ut in trilateris dictũ est. Quare Latinum uerbum Græco certius est.

Quot sunt hîc consectaria?

Tria: I. Latera quadratorũ æqualiũ sunt æqualia.

II. Potentia rectæ est quadratum. Δύναμις potentia uerbum est Euclidi lib.10. usitatum. Dicitur autem linea recta posse quadratũ, quia in seipsam ducta, facit quadratum. Potentia porro ista, ut Aristoteles ait 5 & 9. Philos. dicitur κατὰ μεταφοράν.

III. Si duæ contermine perpendiculares æquales claudantur parallelis, constituent quadratum. ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι. 46.p.1. Nam,

Parallelogrammum rectangulum, cuius unum latus æquatur omnibus: est quadratum.

At parallelæ quæ claudunt duas conterminas perpendiculares, faciunt parallelogrammũ ex thesi, (quia opposita latera æqualia) & rectangulum quia cum angulus perpendicula-

rium ſit rectus, omnes recti erunt per 2.e.11.) Deinde unum latus perpendicularium æquatur omnibus: primum oppoſito per 6.e.10. & alteri perpendiculari per theſin, ideoq; oppoſito per 6.e.10.

Parallelæ igitur illæ, conſtituunt quadratum.

Quot conſideranda ſunt in Euclidis problemate?

Tria: I. Procli ſubtilitas. II. Conſtitutio quadrati. III. An opus fuerit problemate.

Quænam eſt ſubtilitas Procli hîc?

Subtilior eſt hîc Proclus in differentia conſtitutionis & deſcriptionis, τὸ συστήσασθαι καὶ ἀναγράψαι: tanquã iſta uocabula ideò diſtinxerit Euclides quod conſtitutio fiat ex multis, ut trianguli, ut anguli: deſcriptio ex uno, ut circuli, ut quadrati. At ἀναγράψαι deſcribere etiam ſexto libro dicit Euclides rectilineũ quodcunque, nec iſtam differentiam hîc ſpectauit.

Quomodo percipitur conſtitutio quadrati?

Aequilateri trianguli conſtitutio generali trianguli conſtitutione continetur, ut ſupra dictum eſt: & ſicuti parallelogrammi conſtitutio, quamuis pernecesſaria, tamen præcipuo problemate ab Euclide nõ exponitur, ſed è 31 & 33. deducitur, ſic è ductu perpẽdiculi & parallelæ, deſcriptio quadrati percipitur: nec aliud hîc Theon adhibuit.

Nihil igitur problemate hîc opus fuit?

Vti ductio, continuatio, deſcriptio peripheriæ: uti conſtitutio trianguli, rectãguli, obtuſanguli, acutanguli, parallelogrammi, oblongi, rhombi, rhomboidis, trapezij, cæterarumq; figurarum principij loco ſumitur, non demonſtratur: ſic cum definitum eſſet quadratum, parallelogrammum æquilaterum & rectangulum, protinus intelligeretur è perpendiculis & parallelis æqualibus conſtituendum. Quare problema-

blemate præcipuè nihil hic opus eſt, & nos conſecta rium fecimus.

Quot ſunt conſideranda in Quadrato?

Duo: Planus quadrati & Comparatio.

Quid eſt planus Quadrati?

Planus quadrati eſt planus æquilaterus. Eſt 18.d. 7.paulò ſecus expoſita. τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. Eſt uerò quadratū ex omnibus planis inprimis rationale, nō tamen ſemper, ſed tantum rationale eſt cuius numerus eſt quadratus. Itaq; quadrata numerorum non quadratorum, non ſunt rationalia.

Quænam eſt eius Geneſis ſeu inuentio?

Fit à numero in ſeipſum multiplicato. Quales quadrati ſunt primi nouem. 1.4.9.16.25.36.49.64.81. Atque hęc ſumma eſt quadrati numeri geneſis & inuētio per multiplicationem è dato latere.

Quottuplex eſt comparatio quadrati?

Duplex: Aut enim eſt ſeparatim cum rectangulo uel quadrato: aut cum rectangulo & quadrato ſimul.

Quænam eſt comparatio quadrati cum rectangulo?

Si tres rectę ſunt proportionales, quadratum mediæ æquatur rectangulo extremarum, & contra. 17.p.6. & 20.p.7. Conſectariolum eſt è.2.c.14.e.10. Conſectarium itē hoc quadrati nomine infinitè citatur, ut ſuperius illud de rectangulo.

Quænam eſt comparatio quadrati cum quadrato?

Eſt duplex: Aequalitatis & Inæqualitatis. Illa eſt in baſi & diagonio.

I. Quænam eſt ratio baſis?

Si baſis trianguli ſubtendit rectum, æquè poteſt cruribus: & contra. ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ

I 2 τοῖς

τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.47.p.1.ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις: ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ὀρθή ἐστι.48.p.1.Hîc consid. sunt quinque: Inuentor, Generalis, Ratio, Vsus, & Consectaria.

Quis est huius elementi inuentor?

Pythagoras. Tertium autem hîc est Pythagoreum inuentum: primum siquidem fuit tres angulos interiores duobus rectis æquari.32.p.1: secundum parabolæ parallelogrammi ad datam rectam.44.p.1. tertiũ hoc deniq;: in quo postremo præcipuè celebrandus est Pythagoras.

Quænam est ad hanc generalis?

Propositio 31.libri 6.seu 5.e.8. quod in genere loquitur de rectilineis. Eius igitur hoc consectarium speciale est de quadratis, sed tamen mirificè celebratum à Pythagoræis, tanquam mater huius (31.p.6.) nondum nata & inuenta esset. Et consectarium infinitè quadrati nomine citatum præ generali: ut permirum sit filiæ & parentem (31.p.6.) & honorem tantoperè celebrari, matris autem parentem & honorẽ silentio sepeliri. Pythagoras autem huius inuentionis lætitia tanta affectus fuisse dicitur, ut Musis bouem immolarit. Refert Apollodorus apud Laërtiũ lib.8. hecatomben immolatam esse, deq; eo factum hoc epigramma:

ἥνικε Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρετο γράμμα,
κεῖν' ἐφ' ὅτῳ κλεινὴν ἤγαγε βουθυσίην.

Et sanè hæc propositio Pythagoræa in Geometricis rebus pluris est, quàm mille boum armenta, tam mirabiles usus, tamq; infinitis in rebus ex una illa propositione oriuntur. Tametsi 31.p.6. ad 47. p.1. generalis est, latiusq; patet: bouesq; mille pro una Pythagoræa boue mercatur.

Vbi nam

Vbi'nam est explicabile?

Hoc consectarium aliquando rationale numeroque explicabile est, sed in triangulo uario tantum. Nam trianguli rectanguli æquicruri latera sunt irrationalia: uarij autem aliquando rationalia: & quidē modo duplici, altero Pythagoræ, altero Platonis, ut Proclus autor est ad 47.p.1.

Qualis est ratio Pythagorea?

Est ex impari numero. Nam si quadratus imparis pro crure primo dati minuatur unitate, dimidius reliqui erit crus alterū, auctus unitate erit basis. Vt in exemplo laterum 3.4.5. Quadratus basis 5 est 25, æqualis quadratis 16 & 9. è cruribus 4 & 3. Itaq; si 3. imparis pro crure primo dati quadratus 9, minuatur unitate ut fiant 8, dimidius reliqui 4, erit crus alterū: dimidius reliqui 4, auctus unitate, erit basis 5. Pythagorei uerò in hac inuentione sibi præcipuè placuerunt, eaq; de causa 5 inuictus numerus ab ijs dicebatur, tanquam basis illa quæ subtendit rectum, uictrix esset, crura uerò debellata, ut Alexander ait primo Philosophiæ. Plutarch. in Iside de hoc triangulo rectangulo & eius natura egregiè philosophatur & τῶν τριγώνων τὸ κάλλιστον vocat, ᾧ καὶ Πλάτων ἐν τῇ πολιτείᾳ δοκεῖ προσκεχρῆσθαι, τὸ γαμήλιον διάγραμμα συντάττων. ἔχει δὲ ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον, τριῶν τὴν πρὸς ὀρθίαν καὶ τεττάρων τὴν βάσιν, καὶ πέντε τὴν ὑποτείνουσαν, ἴσον ταῖς περιεχούσαις δυναμένην. εἰκαστέον οὖν τὴν μὲν πρὸς ὀρθὰς, ἄῤῥενι: τὴν δὲ βάσιν, θηλείᾳ, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν ἀμφοῖν ἐγγόνῳ, καὶ τὸν μὲν ὡς ἀρχὴν, τὴν δὲ ὡς ὑποδοχὴν, τὸν δὲ ὡς ἀποτέλεσμα. τὰ μὲν γὰρ τρία, πρῶτος περισσός ἐστι καὶ τέλειος, τὰ δὲ τέτταρα τετράγωνος ἀπὸ πλευρᾶς ἀρτίου τῆς δυάδος. τὰ δὲ πέντε πῆ μὲν τῷ πατρὶ, πῆ δὲ τῇ μητρὶ προσέοικεν, ἐκ τριάδος συγκείμενα καὶ δυάδος.

Quænam est ratio Platonica?

Est è numero pari. Nam si dimidius paris pro crure primo dati quadretur, quadratus minutus unita-

te, erit crus alterum, auctus unitate erit basis. Vt in exemplo laterum 6. 8. 10. Nam basis 10 quadratus 100, æquatur quadratis 36 & 34. Itaq; si 6 paris pro crure primo dati dimidius 3 quadretur ut fiant nouem, quadratus 9 minutus unitate ut fiant 8, erit crus alterum: auctus 9 unitate, erit basis 10.

Quis est vsus harum rationum?

Ex hac ratione rationalium potentiarum (ut Vitruuius ait li. 9. cap. 2.) normam exactissimam fabricari docuit Pythagoras tribus regulis in trianguli speciem compositis, quæ sunt ut 3. 4, 5. Hinc architectura in scalarum partibus arithmeticam proportionem didicit. Hinc etiam periodi & progressiones corporum cœlestium ordinantur: hinc defectus luminarium ad multa secula durantes prædicuntur: hinc mensura cœli, aëris, terræ capitur: hinc regionum, insularum, urbium, altitudinum, profunditatum, longitudinum διαστημάτων interualla supputantur. De quo plura inferius in geodæsia trianguli.

Quænam sunt hic consectaria?

I. Si duo triangula rectangula sunt in eadem basi anguli recti, bina crura idem poterunt.

II. Si basis trianguli rectanguli subtendit acutum angulum, minus potest cruribus duplici quadrato cruris minoris. Vt in exemplo laterum 3. 4. 5. Nam quadratum de 3 est 9: duorum crurum quadrata 16 & 25, faciunt 41: cruris minoris 4 quadratum est 16: id duplicatum facit 32: cui numero si addas 9 quadratũ basis, totus erit 41. Campanus hic addit duorum quadratorum alteri gnomonem circumponere reliquo æqualem.

II. *Quænam est ratio diagonij?*

Diagonius potest duplum lateris, eique est asymmetra. 116. p. 10.

Quomodo potest duplum lateris?

Quia, Quod potest æquale utrique cruri æquali, po-

li, poteſt duplum alterius.

At diagonius poteſt æquale utrique cruri æquali.

Diagonius igitur poteſt duplum alterius lateris.

Et hæc uia eſt duplicandi quadrati à Platone tradita, ait Vitruuius lib. 9. cap. 1. quod tamen etiam duplicari, triplicari, omninoq́; etiam data ratione augeri poteſt per 1.c.15.e.4.

Cur eſt aſymmetra lateri?

Eius rei duplex eſt demonſtratio. Prior eſt Procli 2.c.2. Theonisque & Campani ad 116. p. 10. per impoſſibile. Nam,

Si diagonius eſſet lateri ſymmetra, daretur quadratus numerus duplus quadrati: quia diagonius poteſt duplum lateris.

At hoc impoſſibile eſt, ut numerus quadratus ſit quadrati duplus. Vterq; enim Theon & Campanus tanquam principium hoc ſumpſit, quod tamen demonſtratum non eſt.

Diagonius igitur longitudine eſt incommenſurabilis coſtæ.

Altera eſt Ariſtotelis in libello. de lineis indiuiduis. Nam,

Si diagonius eſt lateri ſymmetra, par eſt impar. Nam ſi diagonius ſit 4, latus 3.: quadrati diagonij 16, duplum erit ad quadratum lateris: & ita quadratum lateris erit 8, & idem erit 9 ex 3, ſicq́; par eſſet impar.

At hoc impoſſibile eſt.

Illud igitur neceſſe.

Hanc aſymmetriam Ariſtoteles ſæpè citat, ut illā de tribus angulis duos æquantibus. Huc addi poſſit illud ad 42.p.10. Segmenta rectæ uariè ſectæ magis inæqualia maius poſſe.

Quænam est ratio inæqualitatis?

I.Si basis trianguli rectanguli secatur à perpendiculari ex angulo recto dupla ratione:potest sesquialterum maioris cruris,triplum minoris:si quadrupla, sesquiquartum maioris,quintuplum minoris.ad 13. 15.16.p.13.

II.Si recta est secta quotlibet fariam,potest multiplex segmenti cognomine quadrato numeri sectionis. Sic bisecta poterit quadruplum dimidij cognomine quaternario, quadrato binarij secūdúm quem fit sectio:sic trisecta poterit nuncuplum trientis,quadrisecta sedecuplum quadrantis.

Quottuplex est comparatio quadrati cum rectangulo & quadrato simul?

Duplex: Aequalitatis & Inæqualitatis.

Quænam est æqualitatis?

Si recta est secta in duo segmenta: quadratum totius equatur quadratis segmentorū & duplici rectāgulo utriusq;. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἔσται τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.4.p.2.Nam,

Parallelogrammum æquatur diagonalibus & complementis,id est,quatuor particularibus parallelogrammis.3.c.11.e.10.& diagonalia quadrati totius sunt quadrata.24.p.6.

At in recta in duo segmēta secta est totum quadratum.

In ea igitur quadratum totius æquatur quadratis segmentorum & duplici rectangulo segmentorum.

Vt si sectus sit 6 in 4 & 2:quadratus è 6,est 36: quadrati è 4 & 2 sunt 16 & 4 : dubq; plani è 4 & 2 . sunt 8 & 8.At additis,16.4.8.8.redditur quadratus 36. Itaque latus primi diagonalis est latus alterius complementi,& duplicatum est latus simul utriusq;:reliquū

autem

autem latus ſimulutriuſq; eſt latus reliqui diagonalis.Hinc patet 1.Geneſis & Analyſis quadrati:2 Geodæſia trianguli generalis.

Quænam eſt Geneſis quadrati?

Eſt è numerorum multiplicatione ut hîc uides in 144 quadrato,cuius compoſitio eſt ex 12 & 12: diuiſo 12.in duas partes 10 & 2.

	10.	2
	10.	2
		4
	2	0
	2	0
1	0	0
1	4	4

Hîc uides primo & ultimo loco quadratos duos, 100 è parte 10 : & 4 è parte 2: tum duos intermedios planos 20 & 20 : alterum è 2 & 10, alterum è 10 & 2. Denique primi quadrati 100 latus 10,eſt etiam latus alterius ſequentium planorum: itaq; etiam duplicatum,latus eſt utriuſq; plani in unum compoſiti:nempe 40: & eiuſdem compoſiti plani 40 reliquum latus 2,eſt etiam latus ſequentis quadrati 4.

Quænam eſt Analyſis quadrati?

Per proximum elementum & eius conſectarium. Nam è contraria geneſi ſeu compoſitione perſpicitur uia quadrati in ſuum latus retexendi : eadem ſiquidem uia eſt Thebis Athenas , quæ Athenis Thebas.Et hic Geometricæ analyſeos uſus ſupereſt, ut poſtea in cubo , cum alius in totis elementis nullus ſit.Itaq;,

I.notabis quadratos ſingulares ſiniſtrorſum ab ultima nota creſcentes, locis imparibus & deinceps uno intermiſſo deſinere:ſic 144. Hæ notæ ſignificant

quot singularia latera sint colligenda, ut uniuersum latus colligatur: nimirum duo. Deinde quod primis exemplis notum est, quadrati maximi in primū punctum desinentis latus pro quoto adnota, & ipsum quadratum à numero in idem punctum desinente subducito, latus erit 1. nec quicquam restabit, sic

144 (1.

Hæc primi lateris singularis est inuentio. Secundò duplica latus iam repertum, fient 2 & subijce sequenti plano ex duobus planis 20 & 20 facto (quia latus est amborum planorum in unum compositorum) & per hoc latus 2 diuide totum planum 4, eueniet 2 pro secundo quoto, reliquum nempe eiusdem plani latus: quod quia latus est etiam quadrati sequentis, subijcito sequenti puncto tanquam diuisoris notam: facta multiplicatione diuidentium notarum & factorum subductione, nihil restabit. Sic erit exemplum totum:

144

122 (12.

44

Quare hac numeratione diuisio plani intercurrentis sola est, cuius etiam latus negligitur & tantū quæritur: quia quadrati sequentis latus est.

II. Quæratur latus 15129. Primò notato impares locos, sic 15129. Deinde quadrati maximi in primū punctum desinentis latus adnotato & lateris quadratum subducito, nihil restat. Sic,

15129. (1.

1.

Secundo repertum latus 1, duplicatum subijcito plano sequenti 5, & per illud diuidito ipsum planum 5, eueniet in quoto 2, reliquum latus adnotandum in quoto secundo loco post iam repertum latus, & subijcien-

subijciendum sequenti puncto: peracta factorũ subductione, manebunt 7. Sic

7
152 2 9 (12.
22
44

Hæc secunda singularis lateris est inuentio. Tertiò reperta latera duplicentur uelut unum & unius præcedentis quadrati. Quamuis enim in uniuersi quadrati latere retexendo quadrati singulares duobus plures incidant: attamen duo tantum considerantur, & præcedentium omnium latera pro unius quadrati latere numerantur. Ergo reperta latera uelut unum duplicentur, fient 24 & subijciantur plano sequenti 72, planus diuisus dabit 3, reliquum plani latus adnotandum tertio loco post reperta latera, & subijciendum sequenti puncto. Facta subductione, nihil restabit.

7
15129 (123.
243
729

Hinc illius numeri hæc Genesis deprræhenditur.

100	20	3
100	20	3

9
60 ⎤ His additis, to-
300 ⎥ t9 est 5120. quo
60 ⎥ diuiso per duo,
400 ⎬ quotus est 2560
2000 ⎥ bini igitur dimi
300 ⎥ dij, sũt duo plã
2000 ⎦ ni, ex duob. late
10000 ribus 5 & 512.

15129 III. Ali-

III. Aliquando post quadratum iam repertum locis proximis, nec planus nec quadratus est ullus. Itaque latus eius singulare erit o: ut ī quadrato 366025, latus uniuersum est 605 ex tribus lateribus singularibus, quorum medium est o.

3 6 6 0 2 5
6 5 (605.
3 6 2 5
2 2
1 2 0
6 0 0

IIII. Aliquando etiam planus intermedius partē sequentis quadrati continet. Itaq; si latus reliquum maius sit latere quadrati sequentis æquandum est. Vt quæratur latus quadrati 784, primi quadrati latus erit 2 & supererunt 3. Sic,

3
7 8 4 (2
2 4
4

Tum latus idem duplicatum subijciatur plano sequenti 38: planus diuisus daret 9 pro latere reliquo. At hoc latus maius esset latere sequētis quadrati. Minuatur igitur 1 & pro latere 9 sumatur latus 8 & adnotetur, sequentiq; quadrato subijciatur: facta subductione nihil manet.

3 6
7 8 4 (28
4 8
3 2
6 4

Quid

Quid hinc patet?

Inuentio medij proportionalis inter duos datos numeros, si quis tamen est. Nam si factus à duobus est quadratus, latus quadrati est medium inter datos, ut patet per auream regulam. Si propositus numerus non est quadratus, arithmeticum latus & numero explicabile nullum reperietur. Et hic numerus figuratus est umbra figuræ Geometricæ, nec assequitur: neq; tale quadratum est rationale. Quadrati tamen in eo maximi numerabile latus inueniri potest: ut in 148, numerus quadratus 144 continetur, & latus eius est 12, supersunt uerò 4. Latus igitur talis numeri non quadrati exactum nullum unquam tã uero propinquum reperietur, qui in uero propius possit inueniri. Itaq; est inexplicabile numero.

Quot sunt huius inuentionis modi?

Duo: Vnus per gnomonis additionem. Nam si latus inuentum duplicetur & duplicato unitas addatur, totus erit gnomo proximè maioris quadrati. Nã latus est complementum alterum, & duplicatum est simul utrumq;, unitas autem est ultimum diagonale. Circumpositus itaq; gnomo quadrato priori, differentia est quadrati maioris à minore, ubi Aristotelis in Categorijs gnomo additus quadrato, auget non mutat speciem. Quod perpetuò uerum est, si maioris quadrati gnomo addatur proximo minori quadrati, tanquam diagonali. Itaq; ut gnomo habeatur, pro reliqui nominatore duplicatur inuentũ latus pro duplicato complemento, & unitas additur pro diagonali. Sic latus numeri 148 est $12\frac{4}{25}$ cuius ratio pendet ex eadem propositione, unde & latus integrum inuenitur, hoc est ex 4.p.2. Cùm enim latus uniuscuiusq; quadrati præcedentis, id est proximo minoris, tantum distet unitate à latere proximo maioris seu sequentis quadrati, eadem unitas & bis in qua-

in quadrati præcedentis latus & ſemel in ſeipſam du-cta, gnomonem maioris lateris quadrato adijcit. Nam bis ſemel faciunt duo, quæ in 12 ducta faciunt 24 & unitas ſemel in ſeipſam ducta & addita 24, facit 25: Vnitas igitur cum præcedentis quadrati latere 12, facit latus ſequentis quadrati 13: cuius quadratum eſt 169.

13	Vel	10 3
13		10 3
169		9
		30
		30
		100
		169

Quo intelligitur quãtum numerator 4, abeſt à nominatore 25: tantum quadratum 148 abeſſe à proximo maiore quadrato. Nam ſi addas 21, quo abeſt 4 à 25: facies quadratum 169, cuius latus eſt 13.

Quis eſt ſecundus modus?

Eſt per reductionẽ ad datas partes magni ſeu integri nominis, ut centeſimas, milleſimas, aut minutiores alias & quidem quadratas, ut earum latus certũ iam conſtet. Quanto autem minores fuerint, tanto propius uerò datus inuenietur. Sit idem exemplum 148 reductũ ad cẽteſimas quadratas $\frac{1480000}{10000}$. Nominatoris latus eſt 100: numeratoris autem 1216 & ſupſunt 1344: ſic $\frac{1216}{100}$, id eſt 12 $\frac{16}{100}$ uel $\frac{4}{25}$ quod primo etiam modo patebat. Sed in latere numeratoris præter 1216 ſuperſunt 1344, quo tantulo modus hic eſt accuratior priore: reliqua tamen iſta negliguntur, quia ne unam quidem centeſimam in-

uento

uento lateri possunt addere, neq; enim $\frac{1\ 3\ 4}{2\ 4\ 2}\frac{4}{6}$ faciunt unam centesimam. Atq; etiam in minoribus partibus secundus modus præter reliqua monstrat latus aliquanto maius latere per primum modum reperto, ut in 7 latus est per primum modum $2\frac{3}{5}$. At per secundum modum latus 7 reducti ad quadratas millesimas, id est, $\frac{7000000}{1000000}$ est $\frac{645}{2000}$ & supersunt 3975. At $\frac{645}{1000}$ sunt maiores $\frac{3}{5}$. Nam $\frac{3}{5}$ reductæ ad 1000 sunt $\frac{600}{1000}$. At si reduxeris ad idē nomen $\frac{645}{1000}$ erunt etiam $\frac{645}{1000}$. Itaq; secundus modus in hoc exemplo superat primū $\frac{45}{1000}$ neglectis etiam reliquis 3975. Ergo hæc est analysis quadrari lateris è prima ratione quadrati duplici & rectangulo & quadrato æqualis.

Quænam est Geodæsia trianguli?

Trianguli cuiuscunq; Geodæsia generalis una est apud Heronem laterū additione, subductione, multiplicatione & quadrati lateris inuentione, hoc modo: Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continuè facti è dimidio & reliquis, erit area trianguli. Vt in exemplo laterum 6.8.10: latera collecta, sunt 24, dimidiū 12, unde subductis lateribus 6.8.10, reliqua sunt 6.4.2. Iam fac continuè primò 72 è 12 & 6: secundò 288 è 72 & 4: tertiò 576 è 288 & 2.

12. 6.—72. 288. 576.
4.
2.

Latus continuè facti 576 est 24, area trianguli.

1 1

5 7 6 (24

2 4 4

4

1 6

1 6

Geodesia illa generalis, facillima & expeditissima est, si latera integro numero numerentur. Specialis autem geodæsia trianguli rectanguli iam dicta est, sed obliquanguli postea dicetur. Sed generalis longè præstantior. Nam reductione obliquanguli multæ fraudes accidunt, ut lepido uoto Cardanus tantum agri optasse uideatur, quātum ψευδογραφία ista deperiret.

Quid prӕterea de triangulo rectangulo tenendum est?

Scopus eius præcipuus est, datis duobus lateribus, tertium ignotum inuenire: idque duobus modis.

Quis est primus?

E datis duobus lateribus rectum angulum continentibus. Nam simul utriusq; lateris quadrati latus, longitudinem hypotinusæ ostendit. Vt si duo latera sint 5 & 12. Quadratum 25 ex 5, & quadratum 144 ex 12 addita, faciunt 169: cuius latus est 13. pro hypotinusa.

Quis est alter?

E data hypotinusa cum altero latere, rectum angulum continente. Nā è quadrato hypotinusæ quadratum lateris dati subductum, ostendit quadratum lateris quæsiti, & sic latus quæsitum. Vt à quadrato hypotinusæ 169, 25 quadratum lateris dati subductum, relinquit quadratum 144, cuius latus quæsitum est 12.

Quæ nam est demonstratio Geodæsiæ trianguli generalis?

Si causam eius requiras, ænigmati potius quàm theoremati germana sit. Itaque demonstratio eius in Herone nulla est. Iordanus & Iordano posteriores: ut Tartalea Geometricam causam quæsiuêre, sed miris ambagibus & Apollonij logicam longissimè superantibus. Vt in triangulo, cuius latera sunt 13. 14. 15. totus ex ijs numerus est 42. dimidium 21. differentiæ laterum à 21 sunt 8.7.6. factus è dimidio & reliquis esto 7056. latus que 68. area trianguli.

21. 8 —— 168. 1176. 7056.
7
6

6 1
7 0 5 6 (84
4
8
1 6
6 4 1 6
6 4

Hanc numeratione͂ Iordanus & Tartalea demonstrare conati sunt, sed obscurè & per stereometriam, quā etiam continuatio multiplicationis è dimidio & reliquis in ipso theoremate uidetur iudicare.

Quot sunt consideranda in ea demonstratione?

Tria: Constructio, Collectio propositi ex concessis & Conclusio: de quibus uide Ramū in fine scholarum Mathem.

Quæ nam est comparatio quadrati in inæqualitate?

Est cum duobus item rectangulis & totidem qua-

dratis, ſed inæqualiter. Nam ſi baſis trianguli ſubtendit obtuſum: plus poteſt cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo cõtinuatione ad uerticis perpendicularem. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν τὴν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. 12. p.2. Nam,.

Quadratum baſis, æquatur tribus quadratis & duplici rectangulo, per 5.e.
At quadrata crurum æquantur tantùm quadratis tribus.
Itaq; exceſſus reſtat duplicis rectanguli.

LIBER XIII. De Oblongo.

Quid eſt oblongum?

Eſt rectangulum inæquilaterum. Ἑτερόμηκες, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. 31.d.1

Quæ nam eſt ratio oblongorum?

Copioſa eſt è datæ rectæ triplici ſectione, rationali interdum & explicabili numero.

I. *Quæ nam eſt prima ſectio?*

Eſt utlibet. i. in duo ſegmenta æqualia uel inæqualia: unde ratio quadruplex oritur.

Quæ nam eſt prima ratio?

Oblongum è tota & ſegmenta æquatur rectangulo ſegmentorum & prædicti ſegmenti quadrato. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. 3.p.2.

Quot hîc ſunt conſideranda?

Tria. 1. Verbum, utlibet, ὡς ἔτυχε: 2 reprehenſio Euclidis

clidis & Theonis: 3 demonstratio.

Quid significat verbum, vtlibet?

In his propositionibus significat æqualiter uel inæqualiter: & duas partes Euclides intelligit, quamuis de pluribus segmentis propositio possit accipi.

Quæ nam est reprehensio Euclidis?

Quia rectanguli nomine proponit, quod debebat oblongi nomine dicere, sic nempe: Oblongum è tota recta & altero ipsius segmento, æquatur rectangulo utriusq; segmenti & prædicti quadrato.

Quæ nam Theonis?

Theon hic quæstionem oblitus, nihil de proposita rectangulorũ æqualitate cogitat: perpendiculis & parallelis figuras constituit, & cõstitutas demõstrat.

Quottuplex est demonstratio?

Triplex: è syllogismo, principio & conuenientia.

Quomodo e syllogismo?

Oblongum hic cũ genere, rectangulo scilicet, comparatur: tanquam consectarium è 4. e. 11. Enthymemati itaq; è propositione & cõplexione constituto, adde assumptionẽ, syllogismi iudicium cõplebitur.

Rectangulum è duabus rectis & rectangula ex altera insecta & alterius segmẽtis, sunt æqualia. 4. e. 11. Vt rectangulum è 2 & 6. est 12. & rectangulum ex latere 2 & segmentis 2 & 4. est 4 & 8.

Sed oblongum è tota & uno ipsius segmento, est rectangulũ ex duabus rectis: & rectangulum segmentorũ, quadratumq; prædicti segmenti: sunt rectangula ex altera insecta & alterius segmentis. Vt oblongum è tota 6 & segmento 2: est 12: rectangulum segmentorũ 2 & 4 est 8: quadratum segmenti 2 est 4.

Quare oblongum è tota & uno ipsius segmento, rectangulumq; segmentorum & quadratum prædicti segmenti sunt æqualia.

Quomodo è principio?

Vt 4. c. 11. ita & hoc elementum manifestum est ex illo principio logico, quòd totum suis partibus sit æquale.

Quomodo conuenientia?

Quia hìc conuenientia absq; consectario illo satis esse poterat.

Quæ nam est secunda ratio?

Oblonga è tota & segmẽtis æquantur è tota quadrato. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. 2. p. 2.

Quot sunt hìc consideranda?

Duo: 1. Repræhensio Euclidis & Theonis. 2. Demonstratio.

Quæ nam est reprahensio Euclidis?

Quòd in hac propositione, ut & in præcedente, generali rectãguli nomine abutitur pro speciali oblongi. Quare si res suo nomine dicatur, propositio sic erit: Si recta linea secta sit utlibet, oblonga totius & segmentorum, æqualia sunt totius quadrato.

Quæ nam est reprehensio Theonis?

Eius logica hìc similis est superiori. Demonstrat enim figuras rectangulorum, quæ ex ipsa theorematis communi lege postulabantur & assumebantur: æqualitatem rectangulorum, quæ sola demonstranda præponebatur, omittit.

Quottuplex est eius demonstratio?

Duplex: 1. è consectario: 2 è conuenientia.

Quæ nam est è consectario?

Consectarium hìc est & enthymema è 4. c. 11. Nam,

Rectangulum è duabus rectis, & rectangula ex altera insecta & alterius segmentis, sunt æqualia. Vt rectangulum è 6 & 6 est 36: & rectangula ex 6. & 2. 2. 2. sunt ter 12. id est, 36.

At

At hîc quadratum, ut oblonga, ſunt illa rectangula. Nam quadratum ex 6 & 6 eſt 36: ut oblonga ex 6 & 2.2.2. quæ ſunt etiam 36.

Sunt igitur æqualia.

Quæ nam eſt è conuenientia?

Quia, ut conſectarium illud non cogitetur, attamen æqualitas è conuenientia rem manifeſtã facit.

Quæ nam eſt tertia ratio?

I. Oblonga duo è tota & ſegmento cum quadrato reliqui ſegmenti æquantur quadratis totius & prædicti ſegmenti. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 7.p.2. Nam,

Magnitudines congruæ, ſunt æquales. 8. axio.

At oblongo duo è tota & ſegmento cum tertio quadrato reliqui ſegmenti, ſunt magnitudines quæ congruunt quadratis totius & prædicti ſegmenti. Vt 64 quadratum totius 8, & 4 quadratum ſegmenti 2. ſunt 68: quibus congruunt duo oblonga 16 è tota 8 & ſegmento 2 (.i.32) & quadratum 36 è 6 reliquo ſegmento. Nam 32 & 36 additis, ſumma eſt 68: quæ conueniunt ſuperioribus 68.

Oblonga igitur duo è tota & ſegmento cũ tertio quadrato reliqui ſegmenti, ſunt æqualia quadratis totius & prædicti ſegmenti.

II. Baſis trianguli acutanguli minus poteſt cruribus duplici oblongo ex altero crure & eius ſegmento à dicto angulo ad uerticis perpendicularem. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέ-

του αὐτῆς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.13.p.1. Vt trianguli acutanguli latera ſunto.13.20.21. Hic per 4.e.oblonga duo 672. ex tota 21 & ſegmento 16. cum quadrato 25 ex reliquo ſegmento 5: æquantur quadratis 441 è tota 21 & 256 è ſegmento prædicto 16: commune quadratum è perpendiculari 12, eſt 144: quod additum duobus quadratis.i.697.facit 841. Hoc modo:

Oblonga duo ex tota & ſegmento:	672	441.	Quadratum ex tota.
Quadratum reliqui ſegmenti.	25:	256.	Quadrat. è ſegmento prędicto.
	697.	697.	
		144.	Quadratũ commune.
		841.	

Hic quadratum 441 ex tota: cum quadrato ſegmenti prædicti 256, & quadrato communi 144: id eſt, per 5.e.12. cum quadrato baſis 400: æquatur duobus oblongis 672. è tota & ſegmento, cum duobus quadratis 25 & 144 ex reliquo ſegmento & perpendiculari, id eſt, per 5.e.12 cum quadrato 169. è baſi acuti anguli. Hoc modo:

441	672
256	25
144	144
841	841
Vel	Vel
441	672
400	169
841	841

Itaque duo oblonga 672 cum quadrato baſis 169. æquan-

æquantur quadratis crurum 400, 441: uinciturque basis 169, à cruribus 841, duobus oblongis 672.

Quid hinc sequitur?

Hinc habetur perpendicularis in triangulo. Nam si quadratum basis acuti anguli tollatur è quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diuiso, quotus erit segmentum diuidentis à dicto angulo ad uerticis perpendicularem. Vt in superiore exemplo à quadrato 841 crurum 20 & 21, id est, è 400 & 441 additis subducito quadratum 169 è 13 basi: relinquuntur 672: dimidium 336, quo diuiso per crus 21. quotus erit 16, segmentum diuidentis cruris à dicto angulo acuto ad uerticis perpendicularem: reliquum itaque segmentum erit 5. Iam de 169 quadrato basis 13, tollatur 25 quadratum è minoris segmento 5: relinquentur 144 pro quadrato perpendicularis per 5.e. 12. Hic inuenta perpendicularis & latus sectum sunt latera rectanguli: cuius dimidium erit area trianguli. Vt hic rectangulum è 21 & 12 erit 252, dimidium 126 erit area trianguli. Hoc Theon, paulò tamen secus: in 6 lib. magnæ constructionis.

II. *Quæ nam est secunda sectio, vnde quarta existit ratio?*

Si recta est bisecta, secusque: oblongum inæqualium segmentorum cum quadrato intersegmenti, æquatur quadrato bisegmenti. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. 5.p.2.

Quid hic reprehenditur?

Quòd iterum rectangulum pro oblongo sumptum est.

Quottuplex est eius demonstratio?

Duplex. Arithmetica & Geometrica.

te, erit crus alterum, auctus unitate erit basis. Vt in exemplo laterum 6.8. 10. Nam basis 10 quadratus 100, æquatur quadratis 36 & 34. Itaq; si 6 paris pro crure primo dati dimidius 3 quadretur ut fiant nouem, quadratus 9 minutus unitate ut fiant 8, erit crus alterum: auctus 9 unitate, erit basis 10.

Quis est vsus harum rationum?

Ex hac ratione rationalium potentiarum (ut Vitruuius ait li.9.cap.2.) normam exactissimam fabricari docuit Pythagoras tribus regulis in trianguli speciem compositis, quæ sunt ut 3.4,5. Hinc architectura in scalarum partibus arithmeticam proportionem didicit. Hinc etiam periodi & progressiones corporum cœlestium ordinantur: hinc defectus luminarium ad multa secula durantes prædicuntur: hinc mensura cœli, aëris, terræ capitur: hinc regionum, insularum, urbium, altitudinum, profunditatum, longitudinum διαστήματα interualla supputantur. De quo plura inferius in geodæsia trianguli.

Quænam sunt hic consectaria?

I. Si duo triangula rectangula sunt in eadem basi anguli recti, bina crura idem poterunt.

II. Si basis trianguli rectanguli subtendit acutum angulum, minus potest cruribus duplici quadrato cruris minoris. Vt in exemplo laterum 3. 4. 5. Nam quadratum de 3 est 9: duorum crurum quadrata 16 & 25, faciunt 41: cruris minoris 4 quadratum est 16: id duplicatum facit 32: cui numero si addas 9 quadratū basis, totus erit 41. Campanus hic addit duorum quadratorum alteri gnomonem circumponere reliquo æqualem.

II. *Quænam est ratio diagonij?*

Diagonius potest duplum lateris, eique est asymmetra. 116.p.10.

Quomodo potest duplum lateris?

Quia, Quod potest æquale utrique cruri æquali, po-

li, poteſt duplum alterius.

At diagonius poteſt æquale utrique cruri æquali.

Diagonius igitur poteſt duplum alterius lateris.

Et hæc uia eſt duplicandi quadrati à Platone tradita, ait Vitruuius lib. 9. cap. 1. quod tamen etiam duplicari, triplicari, omninoq; etiam data ratione augeri poteſt per 1.c.15.e.4.

Cur eſt aſymmetra lateri?

Eius rei duplex eſt demonſtratio. Prior eſt Procli 2.c.2. Theonisque & Campani ad 116. p. 10. per impoſſibile. Nam,

Si diagonius eſſet lateri ſymmetra, daretur quadratus numerus duplus quadrati: quia diagonius poteſt duplum lateris.

At hoc impoſſibile eſt, ut numerus quadratus ſit quadrati duplus. Vterq; enim Theon & Campanus tanquam principium hoc ſumpſit, quod tamen demonſtratum non eſt.

Diagonius igitur longitudine eſt incommenſurabilis coſtæ.

Altera eſt Ariſtotelis in libello de lineis indiuiduis. Nam,

Si diagonius eſt lateri ſymmetra, par eſt impar. Nam ſi diagonius ſit 4, latus 3.: quadrati diagonij 16, duplum erit ad quadratum lateris: & ita quadratum lateris erit 8, & idem erit 9 ex 3, ſicq; par eſſet impar.

At hoc impoſſibile eſt.

Illud igitur neceſſe.

Hanc aſymmetriam Ariſtoteles ſæpè citat, ut illā de tribus angulis duos æquantibus. Huc addi poſſit illud ad 42.p.10. Segmenta rectæ uariè ſectæ magis inæqualia maius poſſe.

Quænam est ratio inæqualitatis?

I. Si basis trianguli rectanguli secatur à perpendiculari ex angulo recto dupla ratione: potest sesquialterum maioris cruris, triplum minoris: si quadrupla, sesquiquartum maioris, quintuplum minoris. ad 13. 15. 16. p. 13.

II. Si recta est secta quotlibet fariam, potest multiplex segmenti cognomine quadrato numeri sectionis. Sic bisecta poterit quadruplum dimidij cognomine quaternario, quadrato binarij secūdùm quem fit sectio: sic trisecta poterit nonuplum trientis, quadrisecta sedecuplum quadrantis.

Quottuplex est comparatio quadrati cum rectangulo & quadrato simul?

Duplex: Aequalitatis & Inæqualitatis.

Quænam est æqualitatis?

Si recta est secta in duo segmenta: quadratum totius ęquatur quadratis segmentorū & duplici rectāgulo utriusq;. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 4. p. 2. Nam,

Parallelogrammum æquatur diagonalibus & complementis, id est, quatuor particularibus parallelogrammis. 3. c. 11. e. 10. & diagonalia quadrati totius sunt quadrata. 24. p. 6.

At in recta in duo segmēta secta est totum quadratum.

In ea igitur quadratum totius æquatur quadratis segmentorum & duplici rectangulo segmentorum.

Vt si sectus sit 6 in 4 & 2: quadratus è 6, est 36: quadrati è 4 & 2 sunt 16 & 4: dubq; plani è 4 & 2. sunt 8 & 8. At additis 16. 4. 8. 8. redditur quadratus 36. Itaque latus primi diagonalis est latus alterius complementi, & duplicatum est latus simul utriusq;: reliquū autem

autem latus ſimul utriuſq; eſt latus reliqui diagonalis. Hinc patet 1. Geneſis & Analyſis quadrati: 2 Geodæſia trianguli generalis.

Quænam eſt Geneſis quadrati?

Eſt è numerorum multiplicatione ut hic uides in 144 quadrato, cuius compoſitio eſt ex 12 & 12: diuiſo 12. in duas partes 10 & 2.

	10.	2
	10.	2
		4
	2	0
	2	0
1	0	0
1	4	4

Hic uides primo & ultimo loco quadratos duos, 100 è parte 10: & 4 è parte 2: tum duos intermedios planos 20 & 20: alterum è 2 & 10, alterum è 10 & 2. Denique primi quadrati 100 latus 10, eſt etiam latus alterius ſequentium planorum: itaq; etiam duplicatum, latus eſt utriuſq; plani in unum compoſiti: nempe 40: & eiuſdem compoſiti plani 40 reliquum latus 2, eſt etiam latus ſequentis quadrati 4.

Quænam eſt Analyſis quadrati?

Per proximum elementum & eius conſectarium. Nam è contraria geneſi ſeu compoſitione perſpicitur uia quadrati in ſuum latus retexendi: eadem ſiquidem uia eſt Thebis Athenas, quæ Athenis Thebas. Et hic Geometricæ analyſeos uſus ſupereſt, ut poſtea in cubo, cum alius in totis elementis nullus ſit. Itaq;,

I. notabis quadratos ſingulares ſiniſtrorſum ab ultima nota creſcentes, locis imparibus & deinceps uno intermiſſo deſinere: ſic 144. Hæ notæ ſignificant

quot singularia latera sint colligenda, ut uniuersum latus colligatur:nimirum duo. Deinde quod primis exemplis notum est, quadrati maximi in primũ punctum desinentis latus pro quoto adnota, & ipsum quadratum à numero in idem punctum desinente subducito, latus erit 1. nec quicquam restabit, sic
144 (1.

Hæc primi lateris singularis est inuentio. Secundò duplica latus iam repertum, fient 2 & subijce sequenti plano ex duobus planis 20 & 20 facto (quia latus est amborum planorum in unum compositorum) & per hoc latus 2 diuide totum planum 4, eueniet 2 pro secundo quoto, reliquum nempe eiusdem plani latus: quod quia latus est etiam quadrati sequentis, subijcito sequenti puncto tanquam diuisoris notam: facta multiplicatione diuidentium notarum & factorum subductione, nihil restabit. Sic erit exemplum totum:

144.
122 (12.
44

Quare hac numeratione diuisio plani intercurrentis sola est, cuius etiam latus negligitur & tantũ quæritur: quia quadrati sequentis latus est.

II. Quæratur latus 15129. Primò notato impares locos, sic 15129. Deinde quadrati maximi in primũ punctum desinentis latus adnotato & lateris quadratum subducito, nihil restat. Sic,

15129. (1.
1.

Secundo repertum latus 1, duplicatum subijcito plano sequenti 5, & per illud diuidito ipsum planum 5, eueniet in quoto 2, reliquum latus adnotandum in quoto secundo loco post iam repertum latus, & subijcien-

ſubijciendum ſequenti puncto: peracta factorũ ſubductione, manebunt 7. Sic

```
   17
  151 2 9 (12.
   22
   44
```

Hæc ſecunda ſingularis lateris eſt inuentio. Tertiò reperta latera duplicentur uelut unum & unius præcedentis quadrati. Quamuis enim in uniuerſi quadrati latere retexendo quadrati ſingulares duobus plures incidant: attamen duo tantum conſiderantur, & præcedentium omnium latera pro unius quadrati latere numerantur. Ergo reperta latera uelut unum duplicentur, fient 24 & ſubijciantur plano ſequenti 72, planus diuiſus dabit 3, reliquum plani latus adnotandum tertio loco poſt reperta latera, & ſubijciendum ſequenti puncto. Facta ſubductione, nihil reſtabit.

```
     7
  15129 (123.
    243
    729
```

Hinc illius numeri hæc Geneſis depræhenditur:

```
        100      20     3
        100      20     3
        ------------------
                        9
                      6 0  ⎤ His additis, to-
                    3 0 0  ⎥ tũ eſt 5120. quo
                      6 0  ⎥ diuiſo per duo,
                    4 0 0  ⎬ quotus eſt 2560
                  2 0 0 0  ⎥ bini igitur dimi
                    3 0 0  ⎥ dij, ſũt duo pla
                  2 0 0 0  ⎦ ni, ex duob. late
                1 0 0 0 0    ribus 5 & 512.
                ---------
                1 5 1 2 9
```

III. Ali-

III. Aliquando post quadratum iam repertum locis proximis, nec planus nec quadratus est ullus. Itaque latus eius singulare erit o: ut ī quadrato 366025, latus uniuersum est 605 ex tribus lateribus singularibus, quorum medium est o.

3 6 6 0 2 5

6 5 (605.

3 6 2 5

2 2

2 2 0

6 0 0

IIII. Aliquando etiam planus intermedius partē sequentis quadrati continet. Itaq; si latus reliquum maius sit latere quadrati sequentis æquandum est. Vt quæratur latus quadrati 784, primi quadrati latus erit 2 & supererunt 3. Sic,

3

7 8 4 (2

4 4

4

Tum latus idem duplicatum subijciatur plano sequenti 38: planus diuisus daret 9 pro latere reliquo. At hoc latus maius esset latere sequētis quadrati. Minuatur igitur 1 & pro latere 9 sumatur latus 8 & adnotetur, sequentiq; quadrato subijciatur: facta subductione nihil manet.

3 6

7 8 4 (28

4 8

3 2

6 4

Quid

Quid hinc patet?

Inuentio medij proportionalis inter duos datos numeros, si quis tamen est. Nam si factus à duobus est quadratus, latus quadrati est medium inter datos, ut patet per auream regulam. Si propositus numerus non est quadratus, arithmeticum latus & numero explicabile nullum reperietur. Et hic numerus figuratus est umbra figuræ Geometricæ, nec assequitur: neq; tale quadratum est rationale. Quadrati tamen in eo maximi numerabile latus inueniri potest: ut in 148, numerus quadratus 144 continetur, & latus eius est 12, supersunt uerò 4. Latus igitur talis numeri non quadrati exactum nullum unquam tã uero propinquum reperietur, quin uero propius possit inueniri. Itaq; est inexplicabile numero.

Quot sunt huius inuentionis modi?

Duo: Vnus per gnomonis additionem. Nam si latus inuentum duplicetur & duplicato unitas addatur, totus erit gnomo proximè maioris quadrati. Nã latus est complementum alterum, & duplicatum est simul utrumq;, unitas autem est ultimum diagonale. Circumpositus itaq; gnomo quadrato priori, differentia est quadrati maioris à minore, ubi Aristotelis in Categorijs gnomo additus quadrato, auget non mutat speciem. Quod perpetuò uerum est, si maioris quadrati gnomo addatur proximo minori quadrati, tanquam diagonali. Itaq; ut gnomo habeatur, pro reliqui nominatore duplicatur inuentũ latus pro duplicato complemento, & unitas additur pro diagonali. Sic latus numeri 148 est $12\frac{4}{25}$ cuius ratio pendet ex eadem propositione, unde & latus integrum inuenitur, hoc est ex 4.p.2. Cùm enim latus uniuscuiusq; quadrati præcedentis, id est proximo minoris, tantum distet unitate à latere proximo maioris seu sequentis quadrati, eadem unitas & bis in qua-

in quadrati præcedentis latus & semel in seipsam du ⁊cta, gnomonem maioris lateris quadrato adijcit. Nam bis semel faciunt duo, quæ in 12 ducta faciunt 24 & unitas semel in seipsam ducta & addita 24, facit 25: Vnitas igitur cum præcedentis quadrati latere 12, facit latus sequentis quadrati 13: cuius quadratum est 169.

13	Vel	10 3
13		10 3
169		9
		30
		30
		100
		169

Quo intelligitur quãtum numerator 4, abest à nominatore 25: tantum quadratum 148 abesse à proximo maiore quadrato. Nam si addas 21, quo abest 4 à 25: facies quadratum 169, cuius latus est 13.

Quis est secundus modus?

Est per reductionẽ ad datas partes magni seu integri nominis, ut centesimas, millesimas, aut minutiores alias & quidem quadratas, ut earum latus certũ iam constet. Quanto autem minores fuerint, tanto propius uerò datus inuenietur. Sit idem exemplum 148 reductũ ad cẽtesimas quadratas $\frac{1480000}{10000}$. Nominatoris latus est 100: numeratoris autem 1216 & supsunt 1344: sic $\frac{1216}{100}$, id est 12 $\frac{16}{100}$ uel $\frac{4}{25}$ quod primo etiam modo patebat. Sed in latere numeratoris præter 1216 supersunt 1344, quo tantulo modus hic est accuratior priore: reliqua tamen ista negliguntur, quia ne unam quidem centesimam in-

uento

uento lateri possunt addere, neq; enim $\frac{1\;3\;4}{2\;4\;2}\frac{4}{6}$ faciunt unam centesimam. Atq; etiam in minoribus partibus secundus modus præter reliqua monstrat latus aliquanto maius latere per primum modum reperto, ut in 7 latus est per primum modum $2\frac{3}{5}$. At per secundum modum latus 7 reducti ad quadratas millesimas, id est, $\frac{7000000}{10000000}$ est $\frac{645}{2000}$ & supersunt 3975. At $\frac{645}{1000}$ sunt maiores $\frac{3}{5}$. Nam $\frac{3}{5}$ reductæ ad 1000 sunt $\frac{600}{1000}$. At si reduxeris ad idē nomen $\frac{645}{1000}$ erunt etiam $\frac{645}{1000}$. Itaq; secundus modus in hoc exemplo superat primū $\frac{45}{1000}$ neglectis etiam reliquis 3975. Ergo hæc est analysis quadrari lateris è prima ratione quadrati duplici & rectangulo & quadrato æqualis.

Quænam est Geodæsia trianguli?

Trianguli cuiuscunq; Geodæsia generalis una est apud Heronem laterū additione, subductione, multiplicatione & quadrati lateris inuentione, hoc modo: Si de dimidio collectorum laterum dati trianguli latera sigillatim subducantur, latus continuè facti è dimidio & reliquis, erit area trianguli. Vt in exemplo laterum 6.8.10: latera collecta, sunt 24, dimidiū 12, unde subductis lateribus 6.8.10, reliqua sunt 6.4.2. Iam fac continuè primò 72 è 12 & 6: secundò 288 è 72 & 4: tertiò 576 è 288 & 2.

12. 6.——72. 288. 576.
4.
2.

Latus continuè facti 576 est 24, area trianguli.

1 1
5 7 6 (24
2 4 4
4
1 6
1 6

Geodæsia illa generalis, facillima & expeditissima est, si latera integro numero numerentur. Specialis autem geodæsia trianguli rectanguli iam dicta est, sed obliquanguli postea dicetur. Sed generalis longè præstantior. Nam reductione obliquanguli multæ fraudes accidunt, ut lepido uoto Cardanus tantum agri optasse uideatur, quãtum ψευδογραφία ista deperiret.

Quid prætcrea de triangulo rectangulo tenendum est?

Scopus eius præcipuus est; datis duobus lateribus, tertium ignotum inuenire: idque duobus modis.

Quis est primus?

E datis duobus lateribus rectum angulum continentibus. Nam simul utriusq; lateris quadrati latus, longitudinem hypotinusæ ostendit. Vt si duo latera sint 5 & 12. Quadratum 25 ex 5, & quadratum 144 ex 12 addita, faciunt 169: cuius latus est 13. pro hypotinusa.

Quis est alter?

E data hypotinusa cum altero latere, rectum angulum continente. Nã è quadrato hypotinusæ quadratum lateris dati subductum, ostendit quadratum lateris quæsiti, & sic latus quæsitum. Vt à quadrato hypotinusæ 169, 25 quadratum lateris dati subductum, relinquit quadratum 144, cuius latus quæsitum est 12.

Quænam

Quae nam est demonstratio Geodæsiæ trianguli generalis?

Si causam eius requiras, ænigmati potius quàm theoremati germana sit. Itaque demonstratio eius in Herone nulla est. Iordanus & Iordano posteriores: ut Tartalea Geometricam causam quæsiuêre, sed miris ambagibus & Apollonij logicam longissimè superantibus. Vt in triangulo, cuius latera sunt 13. 14. 15. totus ex ijs numerus est 42. dimidium 21. differentiæ laterum à 21 sunt 8. 7. 6. factus è dimidio & reliquis esto 7056. latusque 68. area trianguli.

21. 8 —— 168. 1176. 7056.
7
6

6 1
7 0 5 6 (84
4
8
1 6
6 4 1 6
6 4

Hanc numeratione Iordanus & Tartalea demonstrare conati sunt, sed obscurè & per stereometriam, quā etiam continuatio multiplicationis è dimidio & reliquis in ipso theoremate uidetur iudicare.

Quot sunt consideranda in ea demonstratione?

Tria: Constructio, Collectio propositi ex concessis & Conclusio: de quibus uide Ramū in fine scholarum Mathem.

Quae nam est comparatio quadrati in inæqualitate?

Est cùm duobus item rectangulis & totidem quadratis,

dratis, sed inæqualiter. Nam si basis trianguli subtendit obtusum: plus potest cruribus duplici rectangulo alterius, & ex eo cōtinuatione ad uerticis perpendicularem. Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, μεῖζόν ἐστι τῶν τῶν ἀμβλεῖαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῇ καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. 12. p.2. Nam,.

Quadratum basis, æquatur tribus quadratis & duplici rectangulo, per 5.e.

At quadrata crurum æquantur tantùm quadratis tribus.

Itaq; excessus restat duplicis rectanguli.

LIBER XIII. De Oblongo.

Quid est oblongum?

Est rectangulum inæquilaterum. Ἑτερόμηκες, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δὲ. 31. d. 1

Quæ nam est ratio oblongorum?

Copiosa est è datæ rectæ triplici sectione, rationali interdum & explicabili numero.

I. *Quæ nam est prima sectio?*

Est utlibet. i. in duo segmenta ęqualia uel inęqualia: unde ratio quadruplex oritur.

Quæ nam est prima ratio?

Oblongum è tota & segmenta æquatur rectangulo segmentorum & prædicti segmenti quadrato. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. 3. p. 2.

Quot hîc sunt consideranda?

Tria. 1. Verbum, utlibet, ὡς ἔτυχε: 2 reprehensio Euclidis

clidis & Theonis : 3 demonstratio.

Quid significat verbum, vtlibet?

In his propositionibus significat æqualiter uel inæqualiter : & duas partes Euclides intelligit, quamuis de pluribus segmentis propositio possit accipi.

Quæ nam est reprahensio Euclidis?

Quia rectanguli nomine proponit, quod debebat oblongi nomine dicere; sic nempe: Oblongum è tota recta & altero ipsius segmento, æquatur rectangulo utriusq; segmenti & prædicti quadrato.

Quæ nam Theonis?

Theon hîc quæstionem oblitus, nihil de proposita rectangulorũ æqualitate cogitat: perpendiculis & parallelis figuras constituit, & cõstitutas demõstrat.

Quottuplex est demonstratio?

Triplex: è syllogismo, principio & conuenientia.

Quomodo è syllogismo?

Oblongum hîc cũ genere, rectangulo scilicet, comparatur: tanquam consectarium è 4. e. 11. Enthymemati itaq; è propositione & cõplexione constituto, adde assumptionẽ, syllogismi iudicium cõplebitur.

Rectangulum è duabus rectis & rectangula ex altera insecta & alterius segmẽtis, sunt æqualia. 4. e. 11. Vt rectangulum è 2 & 6. est 12. & rectangulum ex latere 2 & segmentis 2 & 4. est 4 & 8.

Sed oblongum è tota & uno ipsius segmento, est rectangulũ ex duabus rectis : & rectangulum segmentorũ, quadratumq; prædicti segmenti : sunt rectangula ex altera insecta & alterius segmentis. Vt oblongum è tota 6 & segmento 2: est 12: rectangulum segmentorũ 2 & 4 est 8: quadratum segmenti 2 est 4.

Quare oblongum è tota & uno ipsius segmento, rectangulumq; segmentorum & quadratum prædicti segmenti sunt æqualia.

Quomodo è principio?

Vt 4. e. 11. ita & hoc elementum manifestum est ex illo principio logico, quòd totum suis partibus sit æquale.

Quomodo conuenientia?

Quia hîc conuenientia absq; consectario illo satis esse poterat.

Quæ nam est secunda ratio?

Oblonga è tota & segmẽtis æquantur è tota quadrato. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. 2. p. 2.

Quot sunt hîc consideranda?

Duo: 1. Repræhensio Euclidis & Theonis. 2. Demonstratio.

Quæ nam est repræhensio Euclidis?

Quòd in hac propositione, ut & in præcedente, generali rectãguli nomine abutitur pro speciali oblongi. Quare si res suo nomine dicatur, propositio sic erit: Si recta linea secta sit utlibet, oblonga totius & segmentorum, æqualia sunt totius quadrato.

Quæ nam est reprehensio Theonis?

Eius logica hîc similis est superiori. Demonstrat enim figuras rectangulorum, quæ ex ipsa theorematis communi lege postulabantur & assumebantur: æqualitatem rectangulorum, quæ sola demonstranda præponebatur, omittit.

Quotuplex est eius demonstratio?

Duplex: 1. è consectario: 2 è conuenientia.

Quæ nam est è consectario?

Consectarium hîc est & enthymema è 4. e. 11. Nam,

Rectangulum è duabus rectis, & rectangula ex altera insecta & alterius segmentis, sunt æqualia. Vt rectangulum è 6 & 6 est 36: & rectangula ex 6. & 2. 2. 2. sunt ter 12. id est, 36.

At hîc quadratum, ut oblonga, ſunt iſta rectangula. Nam quadratum ex 6 & 6 eſt 36: ut oblonga ex 6 & 2.2.2. quæ ſunt etiam 36.

Sunt igitur æqualia.

Quæ nam eſt è conuenientia?

Quia, ut conſectarium illud non cogitetur, attamen æqualitas è conuenientia rem manifeſtã facit.

Quæ nam eſt tertia ratio?

I. Oblonga duo è tota & ſegmento cum quadrato reliqui ſegmenti æquantur quadratis totius & prædicti ſegmenti. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 7.p.2. Nam,

Magnitudines congruæ, ſunt æquales. 8. axio.

At oblongo duo è tota & ſegmento cum tertio quadrato reliqui ſegmenti, ſunt magnitudines quæ congruunt quadratis totius & prædicti ſegmenti. Vt 64 quadratum totius 8, & 4 quadratum ſegmenti 2. ſunt 68: quibus congrüunt duo oblonga 16 è tota 8 & ſegmento 2 (.i.32) & quadratum 36 è 6 reliquo ſegmento. Nam 32 & 36 additis, ſumma eſt 68: quæ conueniunt ſuperioribus 68.

Oblonga igitur duo è tota & ſegmento cũ tertio quadrato reliqui ſegmenti, ſunt æqualia quadratis totius & prædicti ſegmenti.

II. Baſis trianguli acutanguli minus poteſt cruribus duplici oblongo ex altero crure & eius ſegmento à dicto angulo ad uerticis perpendicularem. Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέ-

του πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. 13.p.1. Vt trianguli acutanguli latera ſunto. 13.20.21. Hic per 4.e. oblonga duo 672. ex tota 21 & ſegmento 16. cum quadrato 25 ex reliquo ſegmento 5: æquantur quadratis 441 è tota 21 & 256 è ſegmento prædicto 16: commune quadratum è perpendiculari 12, eſt 144: quod additum duobus quadratis. i. 697. facit 841. Hoc modo:

Oblonga duo ex tota & ſegmento:	672	441.	Quadratum ex tota.
Quadratum reliqui ſegmenti.	25:	256.	Quadrat. è ſegmento prę dicto.
	697.	697.	
		144.	Quadratũ commune.
		841.	

Hic quadratum 441 ex tota: cum quadrato ſegmenti prædicti 256, & quadrato communi 144: id eſt, per 5.e. 12. cum quadrato baſis 400: æquatur duobus oblongis 672. è tota & ſegmento, cum duobus quadratis 25 & 144 ex reliquo ſegmento & perpendiculari, id eſt, per 5. e. 12 cum quadrato 169. è baſi acuti anguli. Hoc modo:

441	672
256	25
144	144
841	841
Vel	Vel
441	672
400	169
841	841

Itaque duo oblonga 672 cum quadrato baſis 169. æquan-

æquantur quadratis crurum 400, 441 : uinciturque basis 169, à cruribus 841, duobus oblongis 672.

Quid hinc sequitur?

Hinc habetur perpendicularis in triangulo. Nam si quadratum basis acuti anguli tollatur è quadratis crurum, reliqui dimidio per crus diuiso, quotus erit segmentum diuidentis à dicto angulo ad uerticis perpendicularem. Vt in superiore exemplo à quadrato 841 crurum 20 & 21, id est, è 400 & 441 additis subducito quadratum 169 è 13 basi: relinquuntur 672: dimidium 336, quo diuiso per crus 21. quotus erit 16, segmentum diuidentis cruris à dicto angulo acuto ad uerticis perpendicularem : reliquum itaque segmentum erit 5. Iam de 169 quadrato basis 13, tollatur 25 quadratum è minoris segmento 5: relinquentur 144 pro quadrato perpendicularis per 5.e. 12. Hic inuenta perpendicularis & latus sectum sunt latera rectanguli : cuius dimidium erit area trianguli. Vt hic rectangulum è 21 & 12 erit 252, dimidium 126 erit area trianguli. Hoc Theon, paulò tamen secus: in 6 lib. magnæ constructionis.

II. *Quænam est secunda sectio, vnde quarta existit ratio?*

Si recta est bisecta, secusque: oblongum inæqualium segmentorum cum quadrato intersegmenti, æquatur quadrato bisegmenti. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. 5.p.2.

Quid hic reprehenditur?

Quòd iterum rectangulum pro oblongo sumptum est.

Quottuplex est eius demonstratio?

Duplex. Arithmetica & Geometrica.

Quomodo Arithmeticè demonstratur?

Sit recta 8, bisecta in 4 & 4: secusque in 7 & 1. Hic oblongum ex 7 & 1, cum 9 quadrato intersegmenti 3. id est, 16: æquatur 16 quadrato bisegmenti 4. Vt,

7	3	4
1	3	4
7	9	16
16		

Quomodo Geometricè?

Completo diagrammate. Nam,

Parallelogramma æquealta in æquali basi, sunt æqualia. 13. e. 10.

At duo oblonga è bisegmento & latere diagonalis communis (ut sunt a s & i u) sunt parallelogramma æquealta in æquali basi.

Sunt igitur æqualia: & ideò alteri complemento cum communi diagonali, sunt æqualia per 11. e. 10. Nam complementis æqualibus commune est diagonale o y.

Itaque si commune o addatur utrique, oblongum a r æquabitur gnomoni m n l. Quadratum autē intersegmenti est s l. Quare oblongū segmentorum inæqualium a r cum quadrato intersegmenti s l, æquatur quadrato intersegmenti i y.

III. *Quænam est tertia sectio, vnde quinta est ratio?*

Si recta est bisecta & continuata: oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti, æquatur quadrato compositæ seu additæ ex bisegmēto & cōtinuatione. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας: ὀρθογώνιον τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ, καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον

μιον, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης, ὡς ἀπὸ μιᾶς, ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.6.p.2.

Quottuplex est hîc demonstratio?

Duplex, ut antea: Arithmetica & Geometrica.

Quomodo demonstratur Arithmeticè?

Sit recta 6, bisecta in 3 & 3 & continuata in 2. oblongum 16 ex 8 continuata & continuatione 2: cum 9 quadrato bisegmenti. i. 25. æquatur quadrato 25, ex 3 bisegmento & continuatione 2. id est, 5. Vt,

8	3	2	5
2	3	3	5
16	9	5	25
25			

Quomodo Geometricè?

Vt prius. Nam,

Parallelogramma æquealta in æquali basi, sunt æqualia. 13.e.10.

At duo oblonga è bisegmento & latere diagonalis communis (ut sunt a s & i y) sunt parallelogramma æquealta in æquali basi.

Sunt igitur æqualia, & ideò alteri complemento y r æqualia per 11.e.10.

Iam æqualibus addatur so: oblongum a u æquabitur gnomoni n i y. Denique æqualibus addatur quod ratum bisegmenti. Oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti æquabitur quadrato cōpositæ è bisegmento & continuatione. Atque hæ rationes fuerunt oblongi cum rectangulo.

Quid existit hinc?

Mesographus Heronis mechanici seu Mesola-

bus, dictus ab inuentione duarum continuè mediarum proportionalium inter duas datas: unde existit problema Deliacum quod Apollinem ipsum exercuit.

Quid est Mesographus Heronis?

Est infinita regula, quæ sistitur cochleato unco per cauum mobili. Est uerò (ut Pappus ait initio tertij libri) mesographus iste architectis aptissimus, multoque promptior Platonis mesographo.

Quæ nam est Mesographi mechanica?

Est apud Eutocium secundi de sphæra: sed paulò facilius à Ramo ita proponitur. Si duas datas rectas compræhendentes rectangulum & infinitè continuatas, mesographus tangens oppositum angulum angulo datarum, intersecet æquidistanter à centro: intersegmenta erunt media continuè proportionalia datis.

Quot sunt hic consideranda?

Tria: Fabrica, Principium & Demonstratio.

Quæ nam est fabrica?

Sunto duę rectæ compręhendentes rectangulum & continuatas mesographus tangens angulum oppositum angulo datarum, intersecet æquidistanter à centro.

Vbi erit centrum?

Concursus diagoniorum ostendet centrum.

Quomodo deprehenditur æquidistantia à centro?

Ad æquidistantiam à centro uoluendus est mesographus & adhibendus circinus.

Quod' nam est eius rei proprium?

Hoc mechanicum nullo principio Geometriæ certo adhuc inuentum est, ut protinus actione prima æquidistantia deprehendatur.

Quæ nam est demonstratio?

Si sunt æquidistantia puncta: intersegmenta sunt

media

media continuè proportionalia datis:utque una recta est ad unam è continuatis: sic eadem continuata est ad alteram continuatam, sic altera continuata ad alteram rectam. Iam perpendicularis à centro in latus rectę bisecabit latus, per 3. e. 11. quia rectè secat. Itaque duorum oblongorum comparatio sequitur. Nam,

Si recta est bisecta & continuata: oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti, æquatur quadrato additę ex bisegmento & continuatione. 7. e. Assumptoque communi, oblongum cum duobus quadratis æquatur duobus quadratis per 5. e. 12.

At hìc sunt duæ rectæ bisectæ & continuatæ.

Hìc igitur oblongum continuatæ & continuationis, &c.

Itaque oblonga æqualibus æqualia æquantur inter se, sublatisque utrinque æqualibus æqualium radiorum (per 3. c. 6. e. 10.) quadratis, relinquentur æqualia. Quare,

Rectangula æqualia reciprocantur cruribus ęqualis anguli. 14. e. 10.

At hìc sunt rectangula æqualia.

Hìc ergo latera sunt reciproca. Itaque,

1 Vt recta continuata ad rectam continuatam.

Sic continuata ad continuatam.

2 Vt recta continuata ad rectam continuatam.

Sic per c. 9. e. 7. parallela basi, id est per 6. e. 10. recta una ad alteram continuatam: & sic igitur ex concluso, altera continuata ad unam continuatam & sic per c. 9. e. 7. una con nuata ad alteram parallelam, id est, per 6. e. 10. ad alteram rectam.

3 Itaque ut una recta ad alteram continuatam: sic

ſic altera continuata ad unam continuatam: & ſic una continuata ad alteram rectam.

LIBER XIIII. De recta proportionaliter ſecta & reliquis quadrangulis.

Adhuc ſectio triplex fuit, unde æqualitatis rationes quinque fuerunt rationales, ſequitur de ſectione tertia alia ſectio in ſegmenta duo toti proportionalia. Hîc duo conſid. 1. definitio ſectionis proportionalis. 2. ſectio ipſa.

Quæ'nam eſt definitio ſectionis proportionalis?

I. Recta ſecatur ſecundum mediam & extremam rationem, quando fuerit ut tota ad maius ſegmentum, ſic maius ſegmentum ad minus. Ακρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον. 3.d.6. Hæc definitio tota Geometrici generis eſt: per tropum tamen quendam ſermonis ratio media & extrema dicitur pro medio & extremo proportionis termino. Secatur enim hæc linea ſic, ut ipſa cum duobus ſegmentis faciat tres proportionis terminos: ipſaque tota ſit primus terminus, maius ſegmentum medius, minus ſit tertius: id breuiter & propriè uocatur ſecari proportionaliter. Potentiam ipſius & laudem à Campano & Paciolo uide in Ramo.

II. Si recta proportionaliter ſecta, eſt rationalis datæ menſuræ: ſegmenta ſunt ad eam & inter ſe irrationalia. è 6.p.13.

Quod'nam eſt ſectio?

Eſt è ratione oblongi cum quadrato. Itaque hîc duo conſid. ſunt. Fabrica & Ratio triplex.

Quæ'nam

Quæ nam est fabrica sectionis proportionalis?

Si quadratum fiat è data recta, rectæ ab angulo facti ad medium contermini lateris differentia supra dimidium, erit maius segmentum datæ proportionaliter sectæ. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 11.p.2.

Quot sunt hic consideranda?

Quatuor. Abusus nominis, Demonstratio, Vsus & Consectarium.

Quis est abusus nominis?

Rectanguli nomine hæc quæstio abutitur, pro oblongo.

Quæ nam est demonstratio?

Si recta est bisecta & continuata: oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti, æquatur quadrato additæ ex bisegmento & continuatione per 7. e. 13. & ideo per 5. e. 12. æquatur alijs duobus quadratis.

At hic est recta bisecta & continuata.

Hic igitur oblongum continuatæ, &c.

Iam tollatur utrinque commune quadratum: reliquum oblongum æquabitur quadrato a i. Vtrinque tollatur commune a l, quadratum y r æquabitur oblongo r i. Itaque tres rectæ, data nimirum & ipsius duo segmenta sunt continuè proportionales & recta data, secta est proportionaliter. Nam,

Si quadratum mediæ æquatur rectangulo extremarum, tres rectæ sunt proportionales. 4.e.12.

At hic quadratum mediæ æquatur rectangulo extremarum.

Hic igitur tres rectæ sunt continuè proportionales.

Quis

Quis nam est vsus huius sectionis?

Magnus est, ut constat è 10. p. 4. & apud Ptolemæum lib. 1. cap. 9. sed præcipuè in totis mysterijs corporum ordinatorum, quæ in primis sectione istæ proportionali continentur. Denique Christianis quibusdam diuina quædam proportio hîc animaduersa est, ut inde una trinitas & unitas trina conciperetur, quæ tota sit in toto & in parte qualibet, totum in magno, totum in paruo, principium unicum pulcherrimum ac beatissimum.

Quod nam est hîc consectarium?

Si recta proportionaliter secta continuatur maiore segmento, tota secabitur proportionaliter & maius segmentum erit data. *Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι: ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν, ἡ ἐξαρχῆς εὐθεῖα*. 5. p. 13. Quia,

Vbi oblongum è tota & minore segmento æquatur quadrato maioris: ibi tota recta proportionaliter secta est.

At hic oblongum è tota & minore segmento æquatur quadrato maioris.

Hic ergo tota recta est proportionaliter secta.

Atque ita licet infinitè proportionaliter secando rectam augere, itemque contra minuere, Minus segmentum rectæ proportionaliter sectæ est maius segmentum maioris proportionaliter secti: & hinc diminutio fiet in infinitum. Atque hæc de fabrica: sequitur triplex ratio seu proprietas: prima est maioris segmenti, secunda minoris: tertia totius & minoris segmenti. Prima & secunda sunt quintupli, tertia tripli.

Quæ nam est ratio maioris segmenti?

Maius segmentum continuatum dimidio totius, potest quintuplum eiusdem dimidij: & si recta potest quintuplum sui segmenti, reliquum factum duplum

plum prædicti secatur proportionaliter: & maius segmentum est idem reliquum. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ, τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. 1. & 2. p. 13. Hic consid. duo: Diagramma & Demonstratio.

Quomodo fit diagramma?

Recta secetur proportionaliter in segmētum maius & minus, sectaque continuetur ita ut continuatio sit dimidium sectæ: dico quadratum ex maiore segmento & continuata quintuplum esse quadrati ex continuatione.

Quottuplex est demonstratio?

Duplex. Antecedentis & Conuersæ.

Quæ nam est Antecedentis?

Fiat ex continuata quadratum: item ex maiore segmento & continuato aliud. Iam,

Quadratum in quo quadratum semel & quater compræhenditur, est quintuplum ad comprehensum.

At in quadrato ex maiore segmento & continuata quadratum continuatæ semel compræhenditur & in reliquo gnomone quater: quod est demonstrandum.

Quadratum igitur ex maiore segmento & continuata, est quintuplum ad quadratum continuatæ.

Quomodo compræhenditur quater in gnomone?

Describatur quadratum ex data recta proportionaliter secta: hoc quadratum quadruplū est ad quadratum continuatæ, per 7. c. 12. Nam,

Recta bisecta potest quadruplum dimidij cognomine quaternario.

At,

At in hoc quadrato datæ rectæ, recta est bisecta.

Potest igitur quadruplum dimidij: & æquatur gnomoni. Nam,

Cùm singulæ partes sunt æquales, tota totis sunt æqualia.

At quadrati quod quadruplum est dicti quadratuli, partes æquantur partib. gnomonis.

Quadratum igitur quadruplum dicti quadratuli æquatur gnomoni.

Quæ nam est demonstratio conuersæ?

Patet in eodem exemplo. Nam cùm maius segmentum & continuata possint quintuplum continuatæ, gnomo erit quadruplus quadratuli: cuius etiam per 7.e.12 quadruplum est quadratum ex data recta. Itaque æquale gnomoni. Latus autem huius quadrati quadrupli est æquale datæ rectæ: itaque duplum etiam continuatæ, &c.

Quæ nam est secunda proprietas quintupli seu ratio minoris segmenti?

Minus segmentum continuatum dimidio maioris, potest quintuplum eiusdem dimidij. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τετραγώνου. 3.p.13.

Quæ nam est hîc demonstratio?

Fiat ex data linea proportionaliter secta quadratum & compleatur figura, noteturque dimidij quadratum & gnomo. Hîc primùm quadratum ex minore segmento continuato per dimidium maioris, est quintuplum secundi ex dimidio maioris segmenti. Nam,

Quadratum quod semel & quater compræhendit quadratulum, est ad compræhensum quintuplum.

At

At quadratum ex minore ſegmento per dimidium maioris continuato, ſemel & quater comprehendit quadratulū. Gnomo enim reliquus quater comprӕhendit: qui oblongo ex tota data & minore ſegmento æquatur.

Quadratum igitur ex minore ſegmento per dimidium maioris continuato, eſt ad quadratulum quintuplum.

Quæ nam eſt ratio tripli?

Tota & minus ſegmentum poſſent triplum maioris. Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.4.p.13.

Oblonga duo è tota & ſegmento cum quadrato reliqui ſegmenti, æquantur quadratis totius & prædicti ſegmenti.per 4.e.13.

At hic ſunt duo oblonga è tota & ſegmento cū quadrato reliqui ſegmenti.

Hic igitur duo oblonga cum quadrato, æquantur quadratis totius & prædicti ſegmenti. Nunc,

Quadrata totius & ſegmēti prædicti poſſunt triplum maioris ſegmenti.

At duo illa oblonga æquantur quadratis, potētibus triplum maioris ſegmenti. Nam ſemel continent quadratum s u & oblongum utrumq; eidem quadrato s u æquatur per theſin & 4.e.12.

Duo igitur illa oblonga continēt ter maius ſegmentum.

De Obliquangulo.

Quid nunc ſequitur?

Hactenus Geometria fuit parallelogrāmi rectanguli: ſupereſt breuiſſima in Euclidis elementis Geo-

metria de parallelogrammo obliquangulo, deq; rectilineis reliquis, neque omnino prolixa geometria hîc requirebatur, quia ex antecedente tota percipitur, reducendo nempe ad parallelogrammum, per 2. c.11.e.10.

Quid est parallelogrammum obliquangulum?

In quo omnes anguli sunt obliqui. Neq; enim potest unus rectus esse in parallelogrãmo, quin omnes sint recti: nec unus obliquus, quin omnes etiam sint obliqui.

Quottuplex est?

Duplex: Rhombus & Rhomboides. Dichotomia hæc opposito genere respondet parallelogrammo rectangulo quadrato & oblongo. Nam quadratum & oblongum in rhombum & rhomboides dislocantur.

Quid est rhombus?

Est obliquangulum æquilaterum. ῥόμβος, σχῆμά ἐστι ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον ȝ.32.d. 1. Vnde constat Rhombum esse quadratum angulis uelut compressum: quo nomine & piscis & nentium mulierum instrumentum & in uitreis fenestris dissectæ plumbo laminę (quia figuram hanc præ se ferant) appellantur. Quò uerò compressior rhombus fuerit, tãtò magis duo acuti erunt anguli, duo obtusi.

Quæ'nam est geodæsia rhombi?

Est per sectionem in triangula. Geodęsia enim seu mensura triangulatorum à triangulis repetitur. Vt sit rhombus cuius singula latera habeant 10: secti uerò in duo triangula diameter 16. Hic trianguli alterutrius latera (iuxta 9. e.12.) collecta faciunt 36, dimidium eius 18: unde subductis lateribus 10.10.16. reliqua sunt 8.8.2. Iam fac continuè primò 144 ex 18 & 8: secundò 1152 ex 144 & 8: tertiò 2304 ex 1152 &

2.La-

2.Latus cõtinuè facti 2304 est 48 area trianguli. Iam bis 48 sunt 96 area rhombi.

```
      7 6
  2 3 0 4   (48
  4 8 8
  6 4
    6 4
```

Quid est Rhomboides?

Est obliquangulum inæquilaterum. ῥομβοειδὲς σχῆμα, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον. 33.d.1. Rhomboides oblongo sic opponitur, ut rhombus quadrato. Sic item quanto maior coarctatio fuerit, tantò maior inæqualitas erit angulorum obtusorum & acutorum. Et Rhomboides dicitur tãquam rhombo simile, tametsi simile præter inæqualitatem angulorum nihil habet. Mensuræ exemplum sic esto. Sit rhomboides cuius unum latus 17, alterum 10 habeat: secti uerò in duo triangula diameter 21. Hic trianguli alterutrius latera collecta faciunt 48, dimidium eius 24: unde subductis lateribus 21. 17. 10. reliqua sunt 3. 7. 14. Iam fac continuè primò 72. è 24. & 3: secundò 504 è 72 & 7: tertiò 7056 è 504 & 14. Latus cõtinuè facti 7056 est 84 area trianguli. Iam bis 84 sunt 168. area rhomboidis.

```
    6 2
  7 0 5 6   (84
    8 4 4
  6 4
    6 4
```

Quid est Trapezium?

Est quadrilaterum non parallelogrammum. 34.d. 1. Euclides postulat hanc fabricam trapezium tanquam mensulam uocari: & sanè nominis eius ratio

geometrica nulla est. Mēsuræ & figuræ exempla hic quatuor sunt, & singula in bina triangula secantur: maius & minus.

In primo exemplo

Maius triangulum 84 est triangulum præcedentis rhomboidis.

Minus colligitur iuxta 9.e.12.Hoc modo.

							Adde
					33		
36.	18.	9.	162.	1296.	1296	(36	84
	8.				966		36
	2.				36		120

In secundo exemplo.

Minus triangulum iuxta 6. e.11. colligitur. Est enim dimidium parallelogrammi rectanguli 12.

Maius triangulum $24\frac{26}{49}$ ex superioribus colligitur.

Iam duo triangula 6 & $24\frac{26}{49}$ addita, faciunt $30\frac{26}{49}$ aream trapezij.

In tertio exemplo.

Maius triangulū 84 est itidem triangulum præcedentis rhomboidis.

Minus triangulum 9.e.12.colligitur:hoc modo.

40	20	12	240	1200	3600	3600.	(60
		5				6	
		3				36	
						12	

Iam utrumq; 60 & 84 additum,faciem 144. aream trapezij.

Quartum exemplum idē est cum primo,nisi quòd situ differat.

Quid est Multangulum?

Quod pluribus quàm quatuor lineis rectis comprehendi-

henditur. πολύπλευρον σχῆμα τὸ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενον. 23.d.1. Hoc generali nomine reliqua omnia figurarum deinceps rectilinearum genera Euclides complexus est, ut sunt quinquangulum, sexangulum, septangulum & deinceps pro numero angulorum innumerabilia. In quolibet autem multanguli genere unum ordinatum esse prædiximus, ut quinquangulum ordinatum, sexangulum ordinatum, & sic in alijs. De quibus omnibus separatim quod hîc precipi possit, nihil animaduerti, nisi unum de quinquangulo, quod adiungemus, reliquis in adscriptionem reiectis.

Quid habes de quinquangulo?

Si quinquangulum æquilaterum tribus angulis æquatur: est æquiangulum. ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι κατὰ τὸ ἑξῆς, ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον. 7.p.13. Hîc demonstratio duplex est, de angulis tribus deinceps æqualibus, & non deinceps æqualibus.

Quænam est mensura multangulorum?

Triangulata multangula è suis itē triangulis mensuram capiunt. Esto quinquangulum è triangulis tribus: quorum duo extrema sunt duo minora primi & tertij exempli in trapezio superius positi: inde igitur ipsorum mensura repetatur. Medij tria latera sunt 17.17.6. Hæc sic colliguntur.

40 20 3 60 180 2520 2520 (50 $\frac{20}{101}$

3 5

14 25

101

Nunc adde tria triangula.

6 0		
3 6		2 0
5 0		———
		1 0 1

———————————

1 4 6

LIB. XV. De Lineis circuli.

Adhuc rectilineorũ Geometria fuit: sequitur Geometria obliquilineorum: è quibus præcipuus est circulus.

Quid est circulus?

Est planum rotundum: κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ 15.d.1. Rectilineum 3.e.6. definitur planum rectis lineis compræhensum: & ita potuit circulus definiri planum peripheria comprænsum, sed rotundius est hoc modo & breuius. Describendi uerò circuli circinus idem artifex est qui fuit peripheriæ: sed illic motus puncti in extremo radio peripheriã lineantis consideratus est: hic consideratur motus radij totam aream radiantis. Circulus Aristoteli 6.cap.3. Rhetor. est planum à medio æquale: quod eodem quidem redit, sed à medio æquari, commune est etiam sphæræ. Circulus uerò est ordinatissimus planorum, ut antea patuit. 7. e.4.

Quot sunt consider. in Euclidis definitione?

Quatuor. I. Genus, figura plana: quod commune est

ne est cum triangulo, quadrãgulo, multangulo. Sed obijci potest,

Figura plana ex æquo intra suas lineas sita est.
At circulus nõ est ex ęquo intra suas lineas sit9.
Circulus igitur non est figura plana.

Sed respondetur.

Figura quæ intra suas lineas ex æquo sita est, plana est.
Circulus ex æquo situs est. Nam si peripheriæ multas partes feceris, ab una ad aliam superficies æquabitur spacio intra eas compræhenso.
Circulus igitur figura plana est.

II. Differentia, quòd circulus ab una linea compræhendatur & concludatur: quo diuiditur circulus à rectilineis: at id etiã ouatæ figuræ cõmune. Nã,

Circulus est figura plana ab una linea compræhensa.
At ouatum est figura plana ab una linea compręhensa.
Ouatum igitur est circulus.

III. Parenthesis (quæ peripheria uocatur) non habetur in litera Procli, sed Theonis.

IIII. Ad quam ab uno signo in figura posito omnes cadentes rectæ æquales sunt inter se. Hic circulus diuiditur ab ouato. Hæ lineæ ἀκτῖνες Platoni, Ciceroni radij sunt.

Quæ causa efficit radios æquales?

Radios æquales efficit ductus & motus eiusdem lineæ duobus circini pedibus compræhensæ: æqualitasq; radiorum in rotundo inde est, quod omnes uelut effigies sunt eidem effectrici lineæ æquales. Aristoteli in mechanicis perpetuò dicitur radius, ἡ γρά φουσα τὸν κύκλον: at Euclidi dicitur, quæ ex centro. At obijci potest,

Circulus est figura in qua radij sunt æquales.

At sphærę etiam extremum paribus à medio radijs attingitur.

Sphæra igitur est circulus.

Sed dupliciter respōderi potest: primò quod sphęra id accipiat à circulo. Circuli enim innumerabiles in sphæra, ut innumerabilia puncta in linea potentia sūnt. Deinde circulus diuiditur à sphæra per superficiem planam: ut circulus sit planum rotundum, sphęra solidum rotundum.

Quot sunt consideranda in circulo?

Duo: Comparatio & Geometria.

Quænam est comparatio?

Circuli sunt ut à diametris quadrata. οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 2. p. 12. Materies ista tam postulandi principij fuit, quàm 1. d. 3. quæ ualdè huic homogenea est: materies non fuit demonstrabilis propositionis.

Quomodo demonstrat eam Ramus?

E' generali 15. e. 4. de figuris similibus. Nam,

Plana similia sunt ut à diametris quadrata, id est, habent duplicatam rationem homologorum laterum. 1. e. 6.

At circuli sunt plana similia & eorum latera homologa sunt diametri. 15. e. 4.

Circuli igitur sunt ut à diametris quadrata. 2. p. 12. vt quadrata à diametris 5 & 4 sunt 25 & 16.

5.	5.	25.
4.	4.	16.

Vt igitur quadratū 25 ad 16: ita circulus ad circulum.

At 25 ad 16 est ratio $1\frac{9}{16}$.

Ergo ita habet se circulus ad circulum.

Quænam est demonstratio Euclidis?

Est obscurissima & multis de causis animaduertēda. La-

da. Labyrinthum hîc Creticum quempiam Stereometrico artificio affectatum credas. In duodecimo libro iteratus est sexies error iste inexplicabilis. Eò igitur diligentius tanquam filo Ariadnes retexendus est, ut ambages in uno semel explicatæ, nullum in ceteris negotium facessant. Impossibile per partes inducitur, sed inductione ualdè insolenti. Tria enim sibi sumit Euclides ad impossibile cogendum obscuriora & magis improbabilia quæstione ad quã probandum adhibentur.

I. Si non sit ut quadratum ad quadratum, ita circulus ad circulũ: erit ita circulus ad aliquod aliud spatium: χωρίον id nominat, neq; cuius figuræ sit explicat, spacium confusè dicit. At propositio nulla adhuc fuit, quæ circulum cum quouis spacio rationalem esse demonstraret: quin omnium ferè in geometricis rebus difficilima quæstio est, utrum circulus ad quadratum & quamnam rationem habeat: ut tamẽ inde certum sit circuli ad quadratum rationem non esse impossibilem, quamuis adhuc nemini possibilis, nemini nota fuerit, quæ etiam Aristotelis iudicio possibilis est.

II. Si circulus esset rationalis ad quodlibet spatium, tamen nulla propositio fuit, quæ doceret tribus spatijs datis inuenire quartum proportionale. Nam 11.12.13.p.6, de linea recta ꝓportionali tertia, quarta, media inuenienda præcipitur: nulla autem de superficiei uel tertiæ uel quartæ uel mediæ, uel etiam talis corporis inuentione geometria fuit. Itaq; sumere potuit Euclides datis tribus rectis quartam: datis autem tribus spatijs non potest ponere proportionale quartum. Cum uerò spatium informe & infiguratum ita sumptum sit proportionale, neq; minus neq; maius esse secundo circulo: ad prius illud assumitur aliud rectilineum inscribi posse dato circulo maius quauis data superficie minore, quàm sit da-

 tus

tus circulus, quod antea nusquam demonstratū est, sed utcunq; colligitur è. 1. p. 10. Præterea assumit inscriptum maius esse dimidio circuli, quod etiam probat. Veruntamen si hic mireris, cum duo inæqualia ita propinqua sint, ut inter ipsa nullum sit medium, ut inter numeros 1 & 2. inter 2 & 3. sic in magnitudinibus duabus, quomodo ad 16. p. 3. dicitur angulū semicirculi maiorem esse quouis dato angulo acuto rectilineo, ut iam inter rectū rectilineum differentia interiecta nulla cogitari possit: quid(inquies)fiet huic sumpto, quòd inter duas quasuis magnitudines inæquales, tertiam tamen postulat minorem maiore, maiorem minore? Etenim si inter duas datas magnitudines intermedia non dico cogitari possit, sed reipsa ac naturæ ueritate possit inueniri, poterit rursus quarta inter secundam & tertiam, quinta inter tertiam & quartam, & sic in infinitum. Itaque si quantulamcunque differentiam iam inde ab initio proposuero, tamen infinitis sectionibus sectilem facies, & quod uix initio semel secturus sis, tamen perpetuò atq; infinitè secturum te profiteris. Admiratio tamen ista ad 10. p. 1. sublata est: ubi Ramus ad longum de magnitudine semper diuidua disseruit. Archimedes tale quiddam sumpsit ad 5. theo. 1. de sphæra.

III. Sed tamen rectilineum istud maius dato spatio inscriptum sit secundo circulo: sequitur deinde ut simile inscribatur primo, de quo tamen nominatim antea propositio nulla fuit, uidetur autem assumi è 18. p. 6. Hoc est notabile tertium. Ergo iam percipimus quàm perspicuis & illustrib. rebus demonstrator theorema sit addicturus.

Quid iam sequitur?

His positis, syllogismus ita concluditur:

Vt primum quadratum est ad secundum, ita circulus primus est ad spacium.

Vt au-

Vt autem rectilineum primum est ad secundũ, sic quadratum primum ad secundum.
Itaq; ut rectilineum ad rectilineum, sic circulus ad spacium.
At alternè:
Primum rectilineum minus est primo circulo.
Ergo secundum minus est spatio, quo tamen maius esse ponebatur. Hoc impossibile est.

Idem fuerit si incipias à secundo circulo; ut concludi omnino possit, ut est de quadratis alterum ad reliquum, sic circulum è duobus alterum ad spaciũ esse non posse, quod sit minus reliquo circulo. Atq; id argumentum est secundi impossibilis futuri. Dicat igitur aduersarius depulsus maioris assertione, spacium illud esse minus secundo circulo, tumque reiectis rectilineis inscriptis, syllogismus ita procedet inuerso modo per 13.d.5.
Vt spatium ad primum circulum, ita secundum quadratum ad primum: & ut quadratum secundum ad primum, ita secundus circulus, si non ad primum circulum, saltem ad aliud spacium.
Itaque ut primum spacium, ad primum circulum, sic secundus circulus ad secundum spacium.
At alternè:
Primum spacium maius est secundo circulo.
Ergo primus circulus maior est secundo spatio.

Quapropter erit ut è quadratis unum ad reliquũ, sic è circulis secundus ad spatium minus reliquo circulo, contra quam primo impossibili erat conclusum. Hæc Euclidis uel Theonis demonstratio est ad 2.p.12. Hi sunt anfractus, hæ sunt ambages, hic denique labyrinthus.

Opus'ne

Opus ne fuit hac demonstratione?

Hac demonstratione tot modis uel suspecta uel obscura, nihil omnino opus fuit. Nam,

Materies principij, non est conuertenda in propositionem demonstrabilem, sed postulanda.

At 2.p.12. est materies principij.

Itaq; 2.p.12. non fuit conuertenda in propositionem demonstrabilem, sed postulanda.

Quomodo approbatur assumptio?

Ex causa illa, quæ est 15.e.4. estq; non solum generalis omnium figurarum communis, sed & circulorum ipsorum propria. Etenim circuli sunt æquales, quorum diametri sunt æquales, materies definitionis fuit Euclidi ad 1.p.3. similes circuli definiti non sunt, sectiones contra similes definiuntur. 10. d.3. quæ capiunt angulos æquales & 23.24.p, 3. dictum est similes sectiones esse æquales in æqualibus basibus. Itaq; cum circuli omnes omnibus sint similes, ut quadrata quadratis, nec ideò speciali definitione sit opus. Attamen proprietas quædam proportionis è rationis æqualitate deduci potest, ut deducitur in triangulis, in angulis, & in centro peripheriáue ad 1.& 33.p.6. Triangula æquealta in basibus æqualibus sunt æqualia & contrà: est 37. 38. 39. 40. p.1. Hinc animaduersum est 1.p. 6. triágula æquealta esse ut bases. Item: si anguli in centro peripheriáue circulorum æqualium sunt æquales, insistunt in peripherijs æqualibus, & contrà: fuit 26 & 27.p.3. Hinc animaduersum est 33.p.6. angulos in centro peripheriáue circulorum æqualium esse, ut sunt peripheriæ in quibus insistunt. Sic cum patuerit non propositione quidem, sed definitione, circulos æquales esse, quorum diametri sunt æquales, facile fuit animaduertere, circulos item æquales esse, quorum à

diame-

dia metris quadrata essent æqualia, unde (sicut antea) deduceretur, circulos esse ut à diametris quadrata, quia si quadrata essent æqualia, æquales esse: si inæqualia, tanto circulos inæquales esse. Quamobrem causa & generalis omnium figurarum communis & circulorũ ipsorum propria conuincit propositionem hanc postulandam fuisse. Vtitur Euclides uel Theon principio in hac demonstratione & postea utetur: Contentum minus esse continente: quod Archimedes primo de sphæra demõstrare uoluit, sed specialiter è polygono & circulo, melius igitur id Euclides postulauit.

Quódnam est consectarium huius elementi?

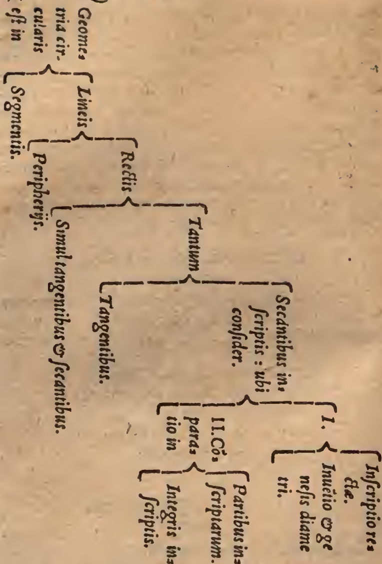
Diametri sunt ut peripheriæ. Est Pappi theorema 5.l.11.& 26.th.18. Vt sint duo circuli quorum unus habeat peripheriam 22. alter 44: unus item diametrum 7.alter 14.Iam

Vt sunt peripheriæ, ita sunt diametri.
At hic peripheriæ sunt in dupla ratione.
Ergo & diametri.Itaq;
Vt se habent 22.ad 44: ita 7 ad 14.
At illa sunt in dupla ratione.
Ergo & hæc.

In quibus rebus versatur Geometria circularis?

In lineis aut segmentis circuli.

Geome-



Quottuplex est inscriptio rectæ?

Duplex: Nam circulo inscribitur recta uel simpliciter, uel æqualis datæ.

Quomodo inscribitur recta circulo?

Sumptis duobus in peripheria punctis. Nam si re
cta

cta duobus in peripheria punctis terminetur, cadet intra circulum. Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. 2.p.3.

Quomodo demonstratur?

Patet è definitione lineæ rectæ, quæ breuissima est intra eosdem terminos: nam recta intra eadem puncta breuior est quàm peripheria. per 5.e.2. Hinc sequitur infinita sectio, de qua c.5.e.1. Colligitur etiam hinc circulum esse polygoniam infinitorũ angulorum, nec peripheriam esse compositam è rectis infinitis, quia recta intra duo quælibet peripheriæ puncta intra circulum cadet. Certè propositio continet quandam definitionem rectæ circulo inscriptæ, quæ nempe utrinq; in peripheria terminatur, & de qua est 7.d.& 1.p.4. Et tamen quicquid hîc est, postulatur ab Archimede 1 & 2.d.1. de sphæra: quòd linea, quòd superficies, ad easdem partes obliqua nõ cadit extra: postulatur item primo Isorrop. quòd figuræ eodem obliquæ centrum intus sit.

Quomodo demonstrat Theon?

Adhibet impossibile ex 16.& 18.p.1.

Quomodo inscribitur circulo æqualis datæ rectæ?

Si à termino diametri ex eaq́; radio æquante datam rectam peripheria describatur, recta à dicto termino in concursum peripheriarum inscribetur dato circulo æqualis datæ rectæ Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. 1.p.4. Hæc inscriptio per regulam aut circinum breuius postularetur, sine quibus etiam geometres nequeat neq; diametrum neq; inscriptam ostendere. Itaq́;

Radij eiusdem peripheriæ sunt æquales. 3.c.5.

c. 5.

At da-

At data & recta ab extremo seu termino diametri ad concursum peripheriarum inscripta dato circulo per 4. e: sunt radij eiusdem peripheriæ.

Data igitur & recta ab extremo diametri ad cōcursum peripheriarum, sunt æquales.

Quænam est inuentio diametri?

Inscriptarum coryphea est diameter: ostendit enim centrum, & rationem omnium inscriptarum. Itaq; diametri circularis inuentio primum genesisq; docenda est. Si inscripta rectæ bisecat inscriptam est diameter circuli, eiusq; medium est centrum. τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν. 1.p.3.

Quænam est causa antecedentis partis?

Causa est eadem quæ 3.e.11. Nam,

Diameter rectanguli, est diameter circuli.

At recta bisecans est diameter rectanguli: quia bisecta est pro latere inscripti rectanguli & subtendit bisectam peripheriam: quibus oppositæ & inscripta & peripheria perinde bisecarentur.

Itaq; recta bisecans est diameter circuli.

Quænam est causa consequentis?

Circularis diametri medium centrum esse, patet è 3.c.5.e.5.& è c.17.e.4. Nam.

Vbi radij æquales secantur, ibi centrum est:

At in circularis diametri medio radij æquales secantur, 3.c.5.e.5.& c.17.e.4.

Ergo in circularis diametri medio est centrum.

Quomodo demonstrat Euclides consequentem?

Demonstratio Theonis uel Euclidis est per 8.p. 1. quia pars esset æqualis toti. Nam,

Triangula inter se æquilatera sunt æquiangula. 8.p.1.

At diameter circuli cum inscripta bisecta, è centro per

tro per radios duos æquales constituit duo triangula inter se æquilatera.

Illa igitur triangula sunt æquiangula in basi. Iam;

Si medium diametri non est centrum, pars æquabitur toti. Nam cùm anguli in triangulis æquiangulis ad basin deinceps æquentur per 1. e. 7. & recti sint per 8. e 5. quia diameter recta in inscriptam perpendiculariter insistat: sequetur, ut si centrum alibi sit quàm in diametro, particularis angulus recti æquetur toti recto.

At hoc est impossibile.

Illud igitur necesse.

Idem accidet si centrum in secantis seu diametri alio loco quàm medio dicatur esse. Sic Euclides impossibile quàm causam maluit: nos causam proposuimus è rotundi radijs æqualibus. Et valdè ridiculum atque ineptum est positis circularis geometriæ principijs, non potuisse primam saltem propositionem directè per ea demonstrari; nisi impossibile adhiberetur.

Quot sunt huius elementi consectaria?

Duo. I. Si duæ rectæ duas inscriptas rectè bisecent, concursus bisecantiū erit centrū circuli. Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπερ ἐστὶ τμῆμα. 25. p. 3. Theon hìc frustrà tres speciales demōstrationes adhibet, cū sit una illa generalis ex inuētione duarum diametrorū. Antea enim patuit 1. & 2. c. 5. e. 4. centrum esse in diametro: & in concursu diametrorum. Imo demonstratio nulla fit, sed consectarium è 1. p. 3. Centrum igitur dupliciter inuenietur, & è medio diametri & è concursu diametrorum in medio bisectarum. Concursu hìc nihil opus est diametrorum plurium: unica satis est diameter. Diametro inuenta, centrum quoque est inuentum: medium quippe diametri.

II. Peripheriam ducere per tria puncta in rectam minimè cadentia. Quod dupliciter fit. Aut enim inter bina puncta, binæ semiperipheriæ utrinq; se secantes ducuntur: & tum per utriusq; cōcursum rectę ductæ & se secantes centrum ostendent. Aut ab uno puncto ad alterum recta ducitur, quæ bisecta, cum altera ex binis item punctis ducta, cōcurrens, centrum item dabit.

Quænam est comparatio inscriptarum secantium?

Est uel in partibus inscriptarum, uel in integris inscriptis. In illis est ratio aut proportio. Ratio item uel æqualitatis uel inæqualitatis.

Quænam est ratio æqualitatis in partibus inscriptarum?

Si diameter bisecat adiametrū, rectè secat: & contra. Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου, εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ: καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. 3.p.3.

Quænam est huius æqualitatis causa?

Eadem quæ tertij elementi undecimi libri. Nam,

Si diameter in triangula æquilatera & æquiangula secat, rectè secat.
At si bisecat, in talia triangula secat. 1.e.7.
Si igitur bisecat, rectè secat. Et econtrà:
Si diameter in triangula æquicrura & in basi æquiangula secat, bisecat. 10.e.6.
At cùm rectè secat, in talia triangula secat.
Cùm igitur rectè secat, bisecat.

Quid Theon hîc?

Is proprietatem diametri per hanc, iam 1.p.3. præassumptam demonstrat. Iubet enim centrū per consectarium. 1. p.3. inueniri: quod consectarium fuit præsens ista proprietas. Logica igitur ista ualde est ἄλογος. Nam,

Qui præassumptam proprietatem demonstrat, is ἀλόγως facit:

At

At Theon præassumptam hanc proprietatem 1. p.3. hîc demonstrat.

Theon igitur ἀλόγως facit.

Quænam est ratio inæqualitatis?

Si a diametri intersecantur, segmenta sunt inæqualia. Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. 4. p. 3.

Quomodo probat Theon?

E' proxima tertia per impossibile. At enthymema est è diametrorum proprietate. 17. c. 4. cuius est consectarium. Nam,

Si inscriptæ sunt bisectæ, sunt diametri. Diametri enim in rotundo bisecantur radijs æqualibus.

Ergo si non sunt diametri, non sunt bisectæ. Nam si diametri essent, id contra thesin esset.

Ad hæc, propositio ista per Euclidem non proponitur apodicticè. Nam,

Nulla apodictica propositio proponitur per inficiationem. Inficiationis enim nullus syllogismus est, nulla demonstratio.

At hæc propositio per inficiationem proposita est.

Non ergo est apodicticè proposita.

Quare trium propositionum. 1. 3. 4. libri 3 materia, tantum diametri proprietatem continet, de qua 17. c. 4. qua inuenta centrum quoq; est inuentum, medium quippe diametri.

Quænam est proportio inscriptarum?

Hactenus diximus de ratione æqualitatis & inæqualitatis in segmentis inscriptarum; quarum proportio est in 35 & 36. p. 3. Itaq; si inscriptæ intersecantur, rectangulum è segmentis unius, æquatur rectangulo è segmentis reliquæ. Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον

ὀρθογώνιον, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 35.p.3.

Quomodo hoc demonstratur?

Intersectæ aut sunt diametri aut adiametri. Si intersectæ sunt diametri, patet proportio. Nam,

Quadrata laterum æqualium, sunt æqualia.

At rectangulum è segmentis unius & rectangulum è segmentis reliquæ diametri, sunt quadrata laterum æqualium.

Duo igitur ista rectangula sunt æqualia.

Quid si intersectæ sint adiametri?

Tum oblongum ex segmentis unius, equatur oblongo ex segmentis alterius. Nam,

Eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

At duo ista oblonga eidem sunt æqualia. Nam si recta est bisecta, secusq;: oblongum inæqualium segmentorum, cum quadrato intersegmenti, æquatur quadrato bisegmenti per 6.e.13. At hic recta una est bisecta, secusque. Nam per 6.e.15. diametro cadente in punctum communis sectionis & perpendicularibus ductis: inscriptæ secantur æqualiter & inæqualiter. Itaque oblongum inæqualium segmentorum, cum quadrato intersegmenti, æquatur quadrato bisegmenti: & addito communi perpendiculari, oblongum idem cũ quadratis intersegmenti & perpendicularis, id est, per 5.e.12. cũ quadrato diametri cadentis in communẽ sectionem, equatur quadratis intersegmenti & perpendicularis, &c.

Duo igitur ista oblonga sunt æqualia.

Quid Theon hic & Campanus?

Theon deducit è 5.p.2. & 47.p.1. Nec tamen una specie totum genus complectitur. Itaq; Campanus quinque species interpretatur & demonstrat. Quo satis elenchum tautologiæ demonstrat quinque demonstra-

monſtrationum ſpecialium pro una generali. Conſequens autem propoſitionis ex æqualitate rectangulorum ſatis docet partes rectarum inſcriptarum proportionales eſſe. Sed quo principio doceri ante poſſit iſta proportio, conſiderandum fuerit, utrum è diametri uel potius circuli proprietate. Præcepit Euclides ſexto libro permulta de proportione figurarum rectilinearum: de circulorum & in circulo rectarum, de angulorum, deque partium proportione paucula. At res iſta non indigna eſt, in qua Geometra neruos intendat ſuos. Atque hæc eſt comparatio de partibus inſcriptarum: ſequitur ratio integrarum inſcriptarum, quàm diameter ſola totam facit.

Quot ſunt de integris inſcriptis elementa?

Quinque: quorum duo priora ſunt de ęqualibus: reliqua 3 de inæqualibus.

- *Inſcriptæ ſunt*
  - *Aequales.*
  - *Inæquales à*
    - *Diametro.*
    - *Puncto*
      - *Diametri nō centro.*
      - *Extra dato.*

Quod nam eſt primum de æqualibus inſcriptis?

Inſcriptæ æquidiſtant à centro, in quas à centro perpendiculares ſunt æquales. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι: μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.4.d.3. Euclides uocat hic lineas in circulo, quas appellat quarto libro ἐναρμοζομένας.i. congruentes, quas Ptol. uocat inſcriptas. Nec uerò hic definitio eſt, ſed proprietas perpendiculi altitudinem conſtituentis.

Quod nam est secundum?

Si inscriptæ sunt æquales, æquidistant à centro: & contra. Ἐν κύκλῳ, αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 14.p.3. Diametri in eodem circulo per 17.e.4. sunt æquales & à centro æqualiter distant, cûm sint per centrum, uel potius nihil omninò distant: reliquæ inscriptæ iudicantur æquales, minores, maiores à diametro uel diametri centro. Euclides superius illud principij loco postulauit, duo sequentia præsentis elementi ut demonstrabilia proposuit; cũ tamen per se clariora sint & euidentiora. Theonis demonstratio est per 3. p.3.& 47.p.1. At causa uidetur è 4.d. 3. unde protinus 14. p. 3. concludatur. Atque hæc sola est propositio de æqualitate inscriptarum.

Quæ nam igitur est Euclidis demonstratio de prima parte?

Dimidijs æqualibus, tota sunt æqualia.
At inscriptarum æqualium dimidia sunt æqualia: perpendiculares enim ductæ bisecant datas per 3.e.11.
Inscriptæ igitur sunt æquales.
Iam ductis radijs è centro ad inscriptas æquales,
Quadratorum æqualium latera sunt æqualia.
At hic ductis radijs fiunt quadrata æqualia. Nam radiorum quadrata per 5.e.12. æquantur binis quadratis crurum, quæ bina ideò æquantur. Tollantur ab æqualibus quadrata duo, relinquentur æqua quadrata à duabus perpendicularibus.
Hic igitur radijs ductis, latera æqua sunt per 2. c.2.e.12.

Quomodo demonstratur conuersa?

Conuersa similiter patet. Nam datæ perpendiculares

gulares bisecant & dimidia, ut prius, æqualia sunt.

Quod'nam est elementum de inæqualibus à diametro?

Inscriptarum inæqualium	*Diameter est maxima:*	
	Diametro propior maior remotiore:	*Duæ utrinque à diametro solæ æquantur.*
	Remotissima minima:	
	Minima propior minor remotiore:	

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. 15.p.3.

Quæ'nam causa est?

Diameter causa est huius uniuersæ & æqualitatis & inæqualitatis. Omnes enim quinque partes patent ex eodem illo æqualitatis argumento.i.centro decrescendi principio & crescendi fine. Nam quo magis à centro receditur, aut ad centrum acceditur, tanto minor aut maior efficitur inscripta.

Quæ'nam est Euclidis conclusio?

Est per triangula de duobus lateribus maioribus reliquo, deque maiore angulo.

Quomodo patet pars prima?

Trianguli duo quælibet latera sunt maiora reliquo.7.e.6.

At diameter æquatur duobus lateribus, radijs nempe & maioribus basi per 7.e.6.

Diameter igitur maior est inscripta quauis.

Quomodo secunda?

Triangulum triangulo æquicrurum maius angulo, est maius basi.4.e.7.

At propioris triangulum, remotioris triangulo æquicrurum, maius est angulo.

Est igitur & basi maius.

Quomodo tertia & quarta?

Tertia & quarta pars, consectaria primæ & secundæ sunt. Nam,

Diameter est maxima.
Ergo à diametro remotissima est minima.
Et, Diametro propior est maior remotiore.
Ergo minimæ propior est minor remotiore.

Quomodo quinta?

Per secundam partem. Nam,

Si præter duas æquales, statuatur tertia æqualis; erit eadem etiam inæqualis: quia diametro propior & remotior.
At hoc impossibile.
Illud igitur necesse.

Quod'nam est elementum de diametri puncto non centro?

Rectarum à diametri puncto nō cētro in peripheriam
- *Quæ per centrum, est maxima:*
- *Propior maximæ est maior remotiore:*
- *Reliqua maximæ minima:*
- *Minimæ propior minor remotiore:*

Duæ utrinque à maxima uel minima solæ æquantur.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον,
- μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον,
- ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή:
- τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί.
- δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 7.p.3.

Quo-

Quae nam est causa aequalitatis?

Hęc propositio generaliter enunciari potest: Duae duntaxat utrinque in dato puncto sunt aequales: & causa aequalitatis uidetur è 4. p.3. non ex ijs comparationibus. Et haec 7. p. cum sequente 8 uidetur è 15. p.3. deducta, neque admodum demonstratione egere. Quod autem addit Euclides ad utramque minimae partem, id commune etiam est ad utramque maximae partem. Denique generaliter id enunciari potest: Duae duntaxat utrinque in dato puncto sunt aequales: & causa aequalitatis uidetur è 4.d.3. non ex ijs comparationibus.

Quomodo demonstratur prima pars?

Patet, ut aut antea, per 7.e.6. Nam,

Trianguli duo quaelibet latera sunt maiora reliquo. 7.e.6.

At recta per centrum aequatur duobus lateribus, radio nimirum & reliquo. 7.e.6.

Recta igitur per centrum maior est inscripta quauis.

Quomodo secunda?

Patet per 4.e.7. de a i & a o, item de a o & a u.

Quomodo tertia?

Tertia a y est minor quàm a u, quia s y aequalis ipsi s u minor est rectis s a & a u per 7. e. 6. & sublato communi s a, relinquetur a y minor quàm a u.

Quomodo quarta?

Quarta è tertia sequitur.

Quomodo quinta?

Esto s r aequans angulum a s r angulo a s u, bases a u & a r aequabuntur per 2.e.7. His si tertia ponatur aequalis, ut a l, sequeretur per 1.e.7. angulum totum l s a particulari r s a aequari.

Quod nam est consectarium è quinta?

Si punctum in circulo est terminus trium recta-

rum in peripheriam æqualium, est centrũ circuli. Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. 9. p. 3.

Quæ nam est eius demonstratio?

Si punctum illud non est centrum, à puncto diametri non centro, non solùm duæ utrinque æquantur, contra quintam partem elementi 13. Nam per quodlibet punctum diameter agi potest.

At duæ solùm utrinque æquantur.

Ergo punctum illud est centrum.

Tale etiam fuit antea in quinquangulo: si tres anguli sunt æquales, omnes sunt æquales. Ita in circulo, si tres ab eodem puncto rectæ in peripheriam æquantur, omnes æquantur.

Quottuplex est Theonis demonstratio?

Duplex. Altera per 8. p. 1. quia triangula inter se ęquilatera sunt æquiangula. Altera per quartam partem septimæ. Et secunda hæc promptior est, & consectarium protinus est ex illà quarta parte septimæ. Syllogismus enim est:

Si punctum diametri non est centrum, duæ solæ rectæ sunt æquales.

At non solæ duæ sunt æquales.

Punctum igitur illud erit centrum.

Sic syllogisticę complexiones ab Euclide & Theone demonstrantur.

Quod nam

Quod'nam est elementum de puncto extra dato?

Rectarũ à dato extra pũcto in periphe'ria	Concaum	Quæ per centrum, est maxima: Propior maximæ, est maior remotiore.	Duæq; utrinq; à maxima uel minima solæ æquãtur.
	Conuexum	Segmentum maximæ, est minima. Minimæ propior minor est remotiore.	

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον εὐθειῶν προσπιπτουσῶν πρὸς τὴν περιφέρειαν τὴν	Κοίλην	ἡ διὰ τοῦ κέντρου, μεγίστη. τῶν ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ κέντρου, τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί.	δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 8. p. 3.
	Κυρτήν	ἐλαχίστη ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου. τῶν ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης, τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων.	

Quæ'nam est hic demonstratio?

Est simillima superiori de quinque partibus. Demonstratio Theonis eadem est quæ 7.p.3. Hîc item ad utramque partem minimæ nil facit, & generaliter enunciari potest: Duæ in dato puncto & solæ æquantur. Demonstratio æqualitatis est per quartam primi, & quòd solæ per quartam partem præsentis

pro-

propoſitionis. Atque hæc de ſecantibus, ſequitur de tangentibus.

Quot ſunt elementa de tangentibus?

Duo.

I. *Quod nam eſt primum?*

Si recta eſt perpendicularis extremæ diametro, tangit peripheriam: & contra. Η τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται. 16.p.3.

Quomodo monſtratur antecedens?

Hoc elementum ſuæ ueritatis cauſa eſt. Cum enim diametro circulus biſecetur, & perpendicularis rectum angulum una parte faciat, continuata faciet etiam deinceps rectum: nec ideò recta congruet obliquæ, uel etiam obliquior erit. Quare elementum illud poſtulandum fuerat ex ipſa perpendiculi definitione. Nam,

Si recta perpendicularis extremæ diametro, nō tangeret, ſed magis hac propenderet: ſecaret, nec eſſet perpendicularis.

At non magis hac propendet, nec ſecat.

Tangit igitur & eſt perpendicularis.

Euclides tamen ſeu Theon cogit. Nam,

Si recta non tangeret, eſſent duo recti in triangulo: contra. 17.p.1. uel 9. & 10.e.6.

At non ſunt duo recti in triangulo.

Recta igitur tangit.

Quomodo demonſtratur conuerſa?

Sicut antecedens. Nam,

Si tangens non eſt perpendicularis diametro, pars maior eſt toto. per 11.e.6.

At hoc impoſſibile.

Illud igitur neceſſe.

Quot ſunt conſectaria huius elementi?

Sex ſunt: quorum quædam ſunt de recta in tangentem:

gentem: quædam de puncto contactus: quædam de angulo contactus.

Quod'nam est de recta?

Si recta est per centrum & contactum, est perpendicularis tangenti: & contra: 18. & 19. p. 3. Nam recta uel à centro in contactũ uel à contactu in centrũ, est pars diametri. Hæ duæ propositiones factæ sunt è conuersa prima parte 16. p. 3. Verùm pro conuersa una dissectæ sunt duæ, quæ tamen unum consectarium faciunt.

Quod'nam est consectarium de puncto?

Punctum contactus est, quo à centro perpendicularis tangenti incidit. Et tangens est singularis eadem parte. Hoc consectarium est è 10. e. 2. Nam;

Perpendicularis est ab eadem parte singularis. 10. e. 2.

At tangens est ipsa perpendicularis.

Tangens igitur ab eadem parte est singularis.

Id Euclidi 16. p. 3. specialius est propositum, quòd nulla alia recta inter peripheriam & tangentẽ cadat.

Quod'nam est primum de angulo?

Angulus contactus; est minor quouis acuto rectilineo. Ἡ τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ λοιπὴ, ἐλάττων. 16. p. 3.

Quid est angulus contactus?

Est angulus rectæ tangentis & peripheriæ, qui uulgò dicitur angulus cõtinentiæ, à Proclo κερατοειδὴς cornicularis: quia ex recta & peripheria instar cornu efficitur.

Quomodo demonstratur?

Si angulus contactus non est minor acuto rectilineo, cadet recta inter peripheriam & perpendicularem.

At hoc contra 16. p. 3.

Angulus igitur contactus minor est.

Postu-

Postulat autem Euclides in Opticis minimum angulum, sed opticum & physicum, non geometricum. Sed hoc elementum de angulo, quæstionem altiorem continet: si angulus contactus rectæ & peripheriæ sit magnitudo, quomodo ea diuidi non possit? Vnde quidam moti sunt ad credendum angulum hunc magnitudinem non esse: ideoque semicirculi angulum recto esse æqualē: falliq; Campanum, qui crediderit dari maius & minus, nec tamen æquale dari posse. Quin mirabilius illud est, angulum contactus maioris peripheriæ minorem esse angulo contactus minoris peripheriæ: & tamen excessum detrahi non posse. At ista eadem ueterum mathematicorum dubitatio est apud Proclum. Quare mirabilis ista res est, attamen uera, ut demonstratio conuincit. Hic etiam mirabile illud ostenditur, lineas ad lucem propius accedere, nunquam congruere. Vt si complurium circulorum intus sese tangentium diametro, recta sit perpendicularis: secundi peripheria propius accedit ad tangentem, & tertij quàm secundi, & sic deinceps: nullius tamen circuli peripheria unquam tam propè accedet, ut congruant, cum uno tantùm puncto possit linea tangere.

Quod nam est secundum de angulo?

Anguli contactus in æqualibus peripherijs sunt æquales. Et sic in catoptricis. 1. p. æqualitas ista sumitur. In peripherijs autem inæqualibus cornicularis angulus minoris peripheriç est maior quàm cornicularis maioris.

II. *Quod nam est secundum elementum de tangentibus?*

Si à radio ex datæ peripheriæ centro ad datum extra punctum peripheria describatur, & à concursu datæ, radijque radio ipsi perpendicularis in descriptam connectatur cum dicto centro: recta à dato puncto

to puncto in concursum datæ & connectentis, tanget datam peripheriam. 17.p.3.

Quomodo demonstratur?

Theon demonstrat per 16.p.3.& 4.p.1.Nam,

Recta perpendicularis extremæ diametro, tangit peripheriam. 15.e.

At recta à dato extra puncto in concursum datæ peripheriæ & connectentis, est perpendicularis extremæ diametro:

Recta igitur tangit peripheriam.

Assumptio probatur per 10.e.2. Nam,

Recta ęqualiter interiacens est perpēdiculum. 10.e.2.

At linea à dato extra puncto in concursum datæ peripherię & connectentis, est recta ęqualiter interiacens.

Linea igitur illa est perpendicularis.

Assumptio probatur per 2.e.7. Nam,

Triangula æquicrura & crurum communi angulo æqua, ęquātur angulis ad basim. 2.e.7.

At duo triangula, unum è radio & è recta à dato puncto in concursum & è connectente: alterum è perpendiculari in radium & è radio datę peripheriæ & è connectente, sunt æquicrura & crurum communi angula æqua.

Duo igitur ista triangula æquantur angulis ad basim. At secundi trianguli angulus in basi est rectus: est ergo & primi rectus: itaq; recta à dato extra puncto æqualiter interiacet: est ergo perpēdicularis: tangit ergo peripheriā.

Atq; hæc de secantibus & tangentibus: sequitur de simul utroque genere.

Quod nam est elementum de tangentibus & secantibus simul?

Si è duabus rectis à dato extra puncto prima secat in concauum reliqua tangit: oblongum è secante & ex-

te & exteriore secantis segmento, æquatur quadrato tangentis: & si oblongum tale æquatur quadrato reliquæ, reliqua ipsa tangit. 36. & 37. p. 3.

Quomodo demonstratur?

Theon hic adhibet 6. p. 2. & 47. p. 1. Sed ex æqualitate rectangulorum quærenda hic proportio laterum fuerit. i. ex effectu consideranda causa. Hic enim tres sunt proportionales: unde etiam sequitur omnia rectangula secantium & extremorū segmentorum inter se æquari: quia æquantur eidem quadrato tangentis.

Eidem æqualia, inter se sunt æqualia.
At rectangula secantium & extremorum segmentorum æquantur eidem quadrato tangentis.
Inter se igitur sunt æqualia.

Quomodo igitur demonstratur antecedens?

Hic duo sunt exempla demonstrationis. Nam secans per centrum aut transit aut non transit. Si transit per centrum, res expeditior est. Nam,

Si recta est bisecta & continuata, oblongum continuatæ & continuationis cum quadrato bisegmenti, æquatur quadrato cōpositæ ex bisegmento & continuatione. 7. e. 13.
At secans per centrum transiens est bisecta & continuata.
Oblongum igitur continuatæ & continuationis. i. secantis & exterioris segmenti, cū quadrato bisegmenti. i. quadrato perpēdicularis tangentique est diameter: æquatur quadrato compositæ ex bisegmēto & continuatione, id est, per 5. e. 12. quadratis ex tangente & perpendiculari. Commune quadratum perpendiculari tollatur, æquabitur rectangulum quadrato tangentis.

Si secans

Si secans non transit per centrum, primò centrum inueniendum est per 6.e.& diameter per 1. c. 15.e.erit perpendicularis tangenti: tum ducantur duæ rectæ, una à centro in punctum extra datum, altera à centro in concursum secantis & peripheriæ: item ducatur perpendicularis à centro in secantem, quæ eam bisecet per 7.e. Ita secans erit bisecta & continuata. Hic nobis proximus propemodum syllogismus redit. Nam,

Si recta est bisecta & continuata, oblongũm, &c.

At secans per centrum non transiens, est bisecta & continuata.

Oblongũ igitur cõtinuatæ & cõtinuationis cũ quadrato bisegmenti, æquatur quadrato cõpositæ ex bisegmẽto & continuatione. Itaq; communi ex perpendiculari in secantem addito, idem oblongum cum quadratis bisegmenti & perpendicularis, id est per 5.e.12. cũ quadrato rectæ à centro in concursum secantis & peripheriæ: æquatur quadratis ex bisegmento cũ continuatione: & ex perpendiculari, id est per 5.e.12. quadrato rectæ à centro in punctũ extra datum, id est, rursus quadratis tangentis & tangenti perpendicularis.

Quomodo demonstratur conuersa?

Esto rectangulum ex secante extra centrum & ex continuatione, æquale quadrato reliquæ in uno latere peripheriæ: dico reliquam tangere. Ducatur per 16.e. tangens ex altero latere peripheriæ, item sit recta à centro ad datum extra punctum & duo radij à centro ad utrumq; tangentem. Hic,

Quibus idem æquale est, illa inter se sunt æqualia.

At duobus quadratis ex utraque tangente, est

idem oblongum ex secante & exteriore eius segmento æquale, per 17.e.& per thesim.

Itaq; duo quadrata ex utraq; tangente inter se sunt æqualia : & ideò ipsæ tangentes inter se sunt æquales.

Tum radius è centro in tangentis dextræ & peripheriæ concursum est perpendicularis tangenti per 1.c.15.e.Hic,

Triangula æquilatera & æquiangula, æquantur angulis ad basim.

At duæ tangentes cum radijs, faciunt duo triangula æquilatera & æquiangula. per 1.c.7.

Faciunt igitur angulos ad basim æquales. At tangentis dextræ angulus rectus est: est igitur & in peripheria angulus rectus & æqualis angulo tangentis sinistræ seu reliquæ per c.8.e.3. Quare reliqua est perpēdicularis extremæ diametro & per 15.e.tangit.

Quot sunt consectaria huius elementi.

Tria: I. Tangentes ab eodem puncto sunt æquales. Quia ipsarum quadrata eidem oblongo æquantur.

Eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

At tangentium ab eodem puncto quadrata, eidem oblongo sunt æqualia.

Tangentes igitur ab eodem puncto sunt æquales.

II. Oblonga è qualibet ex eodem puncto secante & secantis exteriore segmento æquantur inter se. Quia æquantur eidem. Campanus ad 36.p.3.

III. Datis duabus rectis licet alteri cōtinuare tertiam, ut oblongum ex continuata & continuatione æquetur quadrato reliquo: Vitellio 127.p.1. Vt in primo exemplo, si prima sit diameter, secunda tangens, licet continuare tertiam seu exterius secantis segmentum. Superest geometria circularis de peri-

pherijs

pherijs intersectis & contiguis, deq; rectis & peripherijs.

Quódnam est elementum de peripherijs intersectis & contiguis?

Si peripheriæ sunt intersectæ uel contiguæ, sunt eccentricæ: illæque duobus tantum punctis intersecantur, hæ diametros per contactum continuant. 5. 6. 10. 11. 12. p. 3. Hæc omnia postulari poterant. Neq; enim hic propositionis materia potius est, quā principij. Nam circulorum sese secantium uel sese tangentium diuersum esse centrum, per se manifestum est. Si autem duo circuli homocentrici & æquales sese tetigerint, erit unus. Nam (ut Vitellio petit) cùm duæ planæ superficies sese contingunt, una ex ijs superficies efficitur: imò Euclides ante Vitellionem, si non uerbo, certè reipsa idem petiuit. Quid enim aliud est ἐφάρμωσις ad 4 & 8. p. 1. ad 23. 24. 30. p. 3? Hæc igitur materies postulati fuerat. Demonstrationes tamen habent ex impossibili non difficiles: & quidem Theon ipse duas priores ex definitione radij & primo axiomate deducit totum parti æquari.

Quomodo demonstratur prima pars?

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 5. p. 3. Hîc & in 4. p. 3. uitiosum est quòd negatione proponuntur. Sed demonstratio hæc est:

Si peripheriæ intersectæ, non sunt eccentricæ sed idem centrum habent: æquabitur paris toti.
At hoc impossibile.
Illud igitur necesse.

Propositio sic approbatur:
Eidem æqualia, inter se sunt æqualia.
At duo radij, communi radio æquantur.
Duo igitur radij inter se æquantur, pars toti.

Quomodo secunda?

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωσιν ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 6.p.3. Hic considerandum an peripheriæ sint intus contiguæ, an foris. Nam primo modo,

Si peripheriæ contiguæ, non sunt eccentricæ: pars æquatur toti. Nam radij minoris peripheriæ æquarentur radijs maioris.

At hoc impossibile.

Illud igitur necesse.

Si uerò peripheriæ sint foris contiguæ, res expeditior est, neque demonstrationem Euclidis iudicio meruit.

Quomodo tertia?

Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. 10.p.3. Hæc patet ex prima. Nam,

Si intersectæ nō tantum in duobus punctis intersecantur, sunt concentricæ. Nam per 6.e. centro inuento & per 2.c.5.e. tribus rectis ad tria sectionum puncta à centro ductis, radij tres sunt æquales.

At hoc impossibile.

Illud ergo necesse.

Quomodo quarta?

Huius duo sunt exempla. Prius cum tactus intus est. Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη, ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. 11.p.3.

Quænam est demonstratio primi exempli?

Demonstratur eodem modo. Nam,

Si contiguæ, diametros per contactum nō continuant, pars est maior toto. Esto namq; per centra a & e recta a e i o. Hîc trianguli u e a duo latera u e & e a per 7.c.6. sunt maiora quàm

quàm u a, ideoq; quàm a o. Tollatur a e, reliquum u e, maius erit quàm e o. At e i æquatur ipsi e u. Quare e i maius est quã e o pars toto,

At hoc impossibile.

Illud igitur necesse.

Quódnam est alterum exemplum?

Est cum tactus est extra. Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη, διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. 12. p. 3. Eius eadem demonstratio est. Nam per 7. e. 6. e a & i a maiora sunt quàm i e. At e o & i u æquantur ipsis e a & i a. Quare e o & i u sunt maiores quàm ipsa i e partes toto.

Quódnam est elementum de rectis & peripheriis simul?

Si inscriptæ sunt æquales: secant peripherias æquales: & contra. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα, τῇ ἐλάττονι. 28. p. 3. ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. 29. p. 3. Prior deducitur è 26. p. 3. quia protinus per 8. p. 1. concipitur æqualitas angulorum in centro. Altera deducitur è 27. p. 3. Protinus enim concipitur æqualitas basium 4. p. 1. Atqui ex utraq; melius una propositio fieret, sic. Si inscriptæ circulis æqualib. sint æquales, secant peripherias æquales; & contra. Sed multò iustius utraq; postularetur, cum sola conuenientia ἐφάρμοσις manifesta sit. Congruant enim circuli, tum æquales inscriptæ & peripheriæ congruent.

LIB. XVI. De Circuli segmentis.

Quid est segmentum Circuli?

Est quod compræhenditur extrinsecus à periphe-

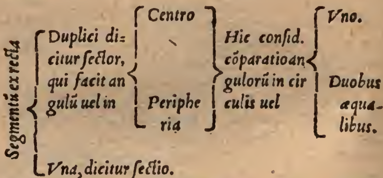
ria, intus à recta: Geometria ſegmentorũ communis eſt etiam ſphæræ.

Quottuplex eſt ſegmentum?

Duplex. Eſt enim uel ſector uel ſectio. Nam recta intus eſt uel duplex uel una.

I. Quid eſt ſector?

Eſt ſegmentum intus comprætenſum à recta duplici faciente angulũ in centro, qui angulus in centro dicitur: ut peripheria dicitur baſis ſectoris. τομεὺς κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου συσταθῇ ἡ γωνία: τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῶν περιφερείας. 9. d. 3.



Sectoris rectilineus angulus, abſolutè dicitur angulus in centro: reliquum autẽ à ſectore dicitur Archimedi ſector maior: qui tamen in duos ſectores inrerie cto radio ſecari poteſt, ut poſtea ſecatur ĩ geodæſia ſectionis.

Quid eſt angulus in peripheria?

Eſt angulus comprætenſus à duabus rectis inſcriptis & in peripheria conterminis. ὅταν αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ᾽ ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία. 8. d. 3. Sector in peripheria dici potuit, intus nempe comprætenſus à duabus rectis conterminis in peripheria. At in elemen-

tis

tis neque mentio neq; usus talis sectoris est, tametsi angulus ipsius absolutè angulus in peripheria dicitur, ut sectoris in centro angulus, appellatur angulus in centro.

Quid sibi vult in Euclide verbum βαίνειν;

Hic uerbum βαίνειν suam ἐνέργειαν habet, qualis est in propositionibus hac de re 20. p. 3. (ubi nominatim appellatur basis trianguli talis peripheria) item 2627. p. 3. unde intelligimus peripheriam in qua angulus insistit & innititur esse anguli basim, non autem eam, quæ anguli latera comprehendit: & quod subtendi fuit in triangulis, id nunc est insistere, & reuera subtensæ dicuntur peripheriæ, quæ sunt bases angulorū, imò Euclides ipse nominatim hoc ipsum uerbum ὑποτάνειν adhibet ad 20. p. 3. Angulus tamen in peripheria ita nominatur, ut in sectione: & pars peripheriæ superior (in qua comprehenditur angulus) diceretur capere angulum, ut sectio capere dicitur. Deniq; alia peripheria intelligitur, in qua est angulus, alia in qua insistit: superior illa facit arcus laterum, ista basim.

Quænam est comparatio angulorum in eodem circulo?

Angulus in centro duplus est anguli in peripheria in eandem peripheriam insistentis. Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία, διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. 20. p. 3. Varietas exempli hic triplex est Euclidi, demonstratio tamen una.

Angulus in peripheria angulum in centro aut
- *Cōprehendit & latus utriusq; anguli est*
  - *Diuersum. 1.*
  - *Communē. 2.*
- *Non comprehendit. 3.*

Quódnam est primum exemplum?

Vbi angulus in periphæria, angulum in centro cõ præhendit, ita ut latera utriusq; anguli sint diuersa: Hic angulus in centro duplus est anguli in periphe-ria. Nam recta per utrumq; angulum in basin anguli in centro, secet duo triangula æquicrura & per 10. e.6. ad basin æquiangula: quorum sigillatim dupli sunt anguli duo exteriores eius anguli qui in centro est. Iam,

Angulus duobus interioribus ęqualibus æqualis, duplus est alterius.

At hic exterior in centro anguli angulus alter, est duobus interioribus æqualis per 2. c.9. e.6.

Est ergo duplus alterius. Itaq;

Vbi anguli sigillatim inter se dupli sunt, toti dupli erunt totius.

At hic angulus exterior & interiores inter se sigillatim dupli sunt.

Erit igitur totus in centro, duplus totius in peripheria.

Quódnam est secundum?

Vbi angulus in peripheria, angulum in centro cõ præhendit, ita ut commune sit latus utriusque. Hic crura communis lateris per 17.e.4. æquantur: sunt enim radij eiusdem figuræ rotundæ: & per 10.e. 6. anguli ad basin æquantur: quibus angulus in centro æquatur per 2.c.9.e.6. Itaq; ut antea,

Angulus duobus interioribus æqualibus ęqualis, duplus est alterius.

At hic angulus in centro, duobus interioribus æqualis est.

Est ergo duplus alterius.

Quódnam est tertium?

Vbi angulus in peripheria, non compræhendit angulum in centro. Sit diameter qui utrumq; angu-

lum

lum tangat: hic angulus non solum totus, sed & particularis æquatur interioribus angulis & inter se æqualibus. Itaq; ut antea,

Angulus duobus interioribus æqualis, duplus est alterius.

At hic angulus in centro totus, duobus interioribus æqualis est.

Duplus igitur est alterius: Iam,

Vbi particularis in centro æquatur duobus interioribus æqualibus: ibi reliquus in centro, duplus est reliqui in peripheria.

At hic particularis in centro æquatur duobus interioribus æqualibus.

Reliquus igitur in centro, duplus est reliqui in peripheria.

Quódnam est huius elementi corollarium?

Si angulus in peripheria aquatur angulo in centro, est duplus basi. Nam,

Angulus in centro duplus est anguli in peripheria.

Ergo angulus in peripheria æqualis angulo in centro, est duplus basi.

Quánam est comparatio angulorum in circulis duobus æqualibus?

Est in proportione duplici cum peripheria subiecta angulorum in centro & angulorum in peripheria. Nam anguli in centro peripheriave circulorum æqualiũ sunt ut peripheriæ in quas insistunt: & contra. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ᾽ ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκῦαι. 33.p.6. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκῦαι. 26.p.3. Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκῦαι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς

κέντροις, ἐπί τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 27. p.3.

Quae nam est hic demonstratio?

De angulis in centro satis sit explicari. Nam,

Vbi anguli in centro aequales sunt, bases etiam aequales sunt per 7.e.7. & peripheriae per 19. e.15.

At in his circulis aequalibus, anguli in centro sunt aequales.

Sunt ergo in ijsdem & bases & peripheriae aequales: Itaque si anguli sunt inaequales, peripheriae item tanto inaequales erunt.

Idem est de angulis in peripheria. Conersa item uera est.

Quódnam est hic consectarium?

Vt sector ad sectorem, sic angulus an angulum.

Quomodo demonstrauit Euclides uel Theon 33.p.6?

Demonstratio eadem huc redit, quae fuit ad 1. p. 6. per 6.d.5. sophismate simillimo. Quaestio enim est categorica de proportione angulorum & peripheriarum. Propositio syllogismi connexa est ex illa definitione: Si sumptis aequemultiplicibus alternis aequalitas, excessus, defectus similiter accidant, proportionalia sumpta esse. Assumptio (quae categorica esse debuerat) per tres illas species rationis abit in fumum superioribus illis similem: aequalitas approbatur è libro tertio: excessus & defectus nullam antea neque propositionem neq; demonstrationem habuit: assumitur tamen à Theone & reuera nihil aliud hic agit, quàm ut inducat, si angulus aequalis, peripheria aequalis: si maior, basis tanto maior: si minor, tãto minor. Ratio autem peripheriarum & subtensarum non eadem est, ut ex Ptolemaeo constat: quale est illud in catoptricis Euclidis 8 theorema, quòd aequalia parallela inaequaliter distantia habẽt maio-

maiorem rationem diſtātiarum quàm angulorum, qualis item Iordani propoſitio.

Quomodo demonſtrauit 26.& 27.p.3?

Theonis demonſtratio hîc per uarias propoſitiones colligitur,& quidem duplex pro duplici angulo & in centro & in peripheria : cum tamen propoſitio utraq; ſpecialis ſit ad 33.p.6. multoq; facilius per 28 & 29.p.3.probari poſſit, quæ ipſæ præponi debent iſtis.Atq; hæc de ſectore.

II. *Quid eſt ſectio?*

Eſt ſegmentum circuli intus comprænhenſum ab una recta,q̄ baſis ſectionis dicitur:& ſi eſt ęqualis facit ſemicirculum, ſi inæqualis, eſt uel maior uel minor ſemicirculo.

Quot ſunt hîc conſideranda?

Duo: Communia & Specialia.

Quænam ſunt communia?



Quomodo absoluitur sectio?

Inuento centro.25.p.3. Inuentio autem centri patuit 6.e.15.& absoluitur circuli modus per c. 6.e.15.

Quomodo bisecatur peripheria?

Peripheria sectionis bisecatur perpendiculari bisecante basin. τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τέμνειν.30. p.3.

Quomodo hoc demonstratur?

Hîc protinus per 2.e.7.seu per 4.p.1. in duobus deinceps triangulis æqualitas basium seu chordarum, per 19.e.15.seu per 28.p. 3. patet æqualitas arcuum. Nam,

Triangula æquilatera,bases habent æquales & æquales peripherias subtensis.

At in peripheria sectionis per perpendicularē bisecta,triangula sunt æquilatera per 2.e.7.

Sunt igitur & bases æquales, & per 19. e. 15.æquales peripheriæ subtensis.

Atqui propositio ista singularem ἐφαρμόσεως speciem continet duobus circulis in uno consideratis, duabus peripherijs in una consideratis.

Quottuplex est hîc angulus?

Duplex: In sectione & Sectionis.

Quid est angulus in sectione?

Est angulus compræhensus à duabus rectis conterminis basi & in peripheria conterminis. Ἐν τμήματι γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥ ἐστι βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι: ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.7.d.3. Itaq; angulus in sectione rectilineus est, angulus autem sectionis est mistilineus. Angulus igitur in sectione dicitur illo modo, quo dicitur recta in circulo. Angulus enim hic in sectione,est angulus inscripti trianguli, neque circuli quicquam habet præter aream.

Quottuplex est ratio sectionis?

Duplex: I. Anguli in eadem sectione sunt æquales. Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 21.p.3. Consectarium est è.5.e.seu 20.p.3. Vnde etiam demonstratur.

Dimidij ad angulum in centro sunt æquales.
At anguli in eadem sectione, sunt dimidij ad angulum in centro, per 5.e.
Sunt igitur æquales.

Vel æquantur per 6.e.Nam,

Anguli insistentes in eandem peripheriam, sunt æquales, per 6.e.
At anguli in eadem sectione insistunt in eandē peripheriam.
Sunt igitur æquales.

Hic constat angulos in sectione reipsa esse angulos in peripheria basiq́;, tantum diuersos.

II. Anguli in oppositis sectionibus æquantur duobus rectis. τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. 22.p.3. Deducitur è 9.e.6. seu 32.p.1.& 11.e.seu 21.p.3. satisq́; sit duos oppositos probare duobus rectis equales. Nam de reliquis patet ut 4.e.6. Itaq́;,

Trianguli tres anguli, sunt æquales duobus rectis. 9.e.6.
At anguli oppositi æquantur tribus angulis unius trianguli. Nam unus oppositorum æquatur sibi, alter per partes æquatur duobus reliquis per 11.e. sunt enim anguli in eadem sectione, ideoq́; æquales.
Itaq́; oppositi æquantur duobus rectis.

Quottuplex est similitudo sectionis?

Duplex: I. Si sectiones capiunt angulos æquales, sunt similes. ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶν, τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας: ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 10.d.3. Euclides

hic

hìc definitionem facit: ſed non magis definitio eſt, quàm è definitione generali conſectarium. In iſta autem definitione Euclides adhibet tantum æqualitatem duorum angulorum, ex qua proportio peripheriarum & baſium ſequitur, ut Pappus ait 13. th. 5. lib. Et triangula inſcripta ſunt ſimilia. Nam,

Triangula æquiangula, ſunt ſimilia. 9. e. 7.

At triangula in ſectionibus inſcripta, ſunt æqui angula ex theſi.

Sunt igitur etiam ſimlia.

Sed illud aptius de æqualitate angulorum: nihil enim adhuc de inſcriptione.

II. Si ſectiones ſimiles, ſunt in æquali baſi: ſunt æquales. Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 23. p. 3. τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν. 24. p. 3. Ex utraq; propoſitione potuit una fieri: Sectiones ſimiles in æquali baſi ſunt æquales. Nametſi prior de eadem baſi, poſterior de æquali loquatur, æqualitas tamen etiam ijſdem conuenit. Deinde prior melius affirmaretur, Similes ſectiones in eadem baſi, ſunt æquales. Et quod additur (eadem parte) nihil ad ueritatem propoſitionis attinet, ſed ad demonſtrationē duntaxat. Præterea poſterior conſectarium eſt è priore, demonſtratur tamen à Theone.

Quomodo demonſtratur prior?

Si ſectiones ſimiles in eadem baſi, ſunt inæquales: angulus in maiore, minor erit angulo in minore, per 3. c. 9. e. 6. Quia continuato latere trianguli, exterior angulus maior eſt utrolibet interiore oppoſito.

At angulus in una ſectione non eſt minor angulo in altera: eſt enim æqualis per theſim.

Sectiones igitur non ſunt inæquales.

Quomodo poſterior?

Quia ſi ſuperponatur ſectio ſectioni, congruet.

Res igitur ἐφαρμόσει contenta fuerit: estq; notabilis in his duabus propositionibus ἐφάρμοσις, in priore quòd minor sectio intelligatur tanquam pars maioris: in secunda autem plenius apparet. Sed Theonis demonstratio adhibeatur de basi æquali.

Si sectiones similes in æquali basi, non sunt æquales: sectiones similes in eadem basi non sunt æquales.

At hoc contra primam partem.

Illud igitur necesse.

Quis est usus harum propositionum duarum?

Per eas & per 2.c.6.e.15. licet inuenire datæ sectioni similem, uel è dato circulo amputare. Sumuntur enim sectiones similes in æquali basi & per tria puncta peripheria ducitur. Atque hæc de angulo in sectione.

Quid est angulus sectionis?

Qui comprahenditur à terminis sectionis. 7.d.3.

Quottuplex est sectio?

Duplex: Aequalis, quæ est semicirculus, aut inæqualis semicirculo. Circulus enim secatur æqualiter uel inæqualiter: διχοτομία facit semicirculos duos, inæqualitas maiorem & minorem sectionem facit.

Quid est semicirculus?

Est sectio dimidia circuli. Itaq; comprahenditur à peripheria & diametro. ἡμικύκλιον ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. 18.d.1.

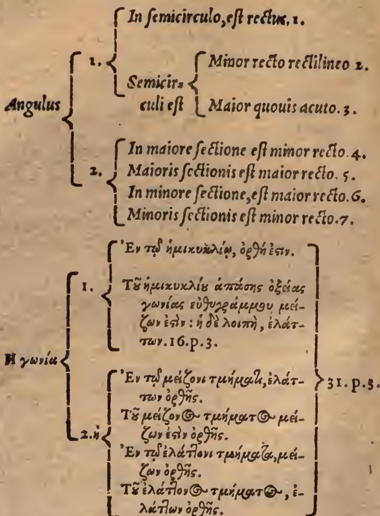
Quot sunt propositiones de geometria semicirculi?

Tres: I. De angulo in semicirculo. II. de media proportionali. III. de angulis in oppositis sectionibus.

I. Quænam

I. Quænam est prima?

Eius sunt septem partes. Nam,



Quomodo demonstratur prima pars?

Ex angulo recto ducatur radius in basim: tum enim diuidetur angulus rectus in duos angulos, æquales duobus angulis reliquis per 10.e.6. Iam,

Trian-

Trianguli angulus æqualis reliquis, eſt rectus. 1.c.3.e 8.uel 32.p.3.

At in ſemicirculo angulus, eſt trianguli angulus, reliquis æqualis. per 10.e.6.uel 5.p.1.

Angulus igitur in ſemicirculo eſt rectus.

Ariſtoteles hic aliam demonſtrationem habet: qui hanc geometriam lib. 2. Poſt. & 9. Philoſ. complexus, ait angulum in ſemicirculo rectum eſſe, quia ſit dimidius duorum rectorum: quod eodem redit. Itaque,

Angulus dimidius duorum rectorũ, eſt rectus:

At angulus in ſemicirculo eſt dimidius duorum rectorum.

Eſt ergo rectus.

Quomodo demonſtratur ſecunda pars?

Patet ex eo, quia angulus ſemicirculi, pars eſt recti. Itaque,

Pars minor eſt toto.

At angulus ſemicirculi, pars eſt totius recti rectilinei quem tangens cum peripheria facit.

Eſt ergo minor.

Quomodo tertia?

Per 4 c.15.e.15. Nam,

Si angulus ſemicirculi non eſt maior quouis acuto rectilineo: tangens non eſt eadem parte ſingularis.

Eſt autem hoc impoſſibile per 4. c.15.e.15.

Illud igitur neceſſe.

Quomodo quarta?

Angulus ad i in maiore ſectione a e i eſt minor recto: quia in eodem triangulo a e i, qui ad a rectus. Et ſi crus neutrum ſit per centrum, conſtitui tamen poteſt angulus æqualis dato in eadem nempe ſectione.

Quomodo quinta?

Angulus continens est maior contento.
At angulus maioris sectionis continet rectum.
Est ergo maior recto.

Quomodo sexta?

Angulus a o c in minore sectione est maior recto per 12.e.15. quia in opposita sectione ad i est minor recto.

Quomodo septima?

Pars recti, est minor recto.
At angulus minoris sectionis, est pars recti: nempe exterioris, si producatur conterminum latus maioris sectionis.
Est ergo minor recto.

Atque hæc de angulis circuli, quorum omnium efficacissimus est angulus in semicirculo, nec frustrà ab Aristotele toties appellatus. Hanc igitur Aristotelis Geometriam plenius aperiamus. Hinc enim plurima oriuntur.

I. Si duæ rectæ diametro circuli conterminæ conterminantur in peripheria, faciunt angulum rectum.

II. Si recta infinita secetur à peripheria externi centri in punctis dato & contingente: & diameter sit à contingente, recta à dato puncto connectens diametrum, erit perpendicularis super infinitam. Nam,

Faciens cum infinita angulum in semicirculo, est perpendicularis.
At recta à dato puncto connectens diametrum, facit cum infinita angulum in semicirculo.
Recta igitur connectens diametrum est perpendicularis.

III. Si recta à dato puncto faciens angulum cum infinita, fiat diameter peripheriæ secantis infinitam:

finitam: recta à dicto puncto connectens segmentū erit perpendicularis super infinitam.

IIII. Si duarum rectarum maior fiat diameter circuli, minorq; maiori contermina & inscripta connectatur, maior plus poterit, quàm minor quadrato connectentis. ad 13.p.10. Fiet enim triangulum rectangulum. Itaque,

Rectangulum triangulū æquè potest cruribus. 5.e.12.

At hic fit triangulum rectangulum.

Hic ergo basis subtendens rectum, æquè potest cruribus & basis quadratū, maius est quadrato maioris lateris, per lateris minoris quadratū. Vt si basis sit 5 maius latus 4. minus 3. Quadratum basis 25 superat quadratū lateris maioris 16, per minoris quadratum 9.

II. Quæ nam est secunda propositio de geometria semicirculi?

Est de media proportionali. Nam si recta continuata è duabus rectis fiat diameter circuli, perpendicularis à puncto continuationis in peripheriam erit proportioalis. δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν. 13.p.6. Nam ductis duabus rectis in peripheriā, fiet rectangulum, cuius angulus erit angulus in semicirculo. Itaque,

Proportionalis inter segmenta basis, est perpendicularis inter datas. 1.c.4.e.8.

At perpendicularis à puncto continuationis in peripheriam est proportionalis inter segmenta basis.

Est igitur perpendicularis inter datas.

Sic si quadrati decempedalis latus quæratur: oblongi æqualis ipsi quadrato latera unius pedis & decem pedum cōtinuentur: proportionalis media erit latus quadrati. Huic uerò propositioni in numeris

nulla respondet apud Euclidem: neque enim perpetuo est: ut inter 3 & 5: neque si sit, inueniri tamen sine quadrati lateris analysi admodum possit. In geometricis autem res est multò promptior & expeditior, omniumq; duarum linearum & est & inuenitur perpetuò & protinus media proportionalis. Huc potest aggregari & illud: Si duarum rectarum maior minimum dupla minoris, fiat diameter circuli, minorque extremæ diametro perpendicularis, connectatur cum peripheria per rectam diametro parallelam: recta à connexione diametro perpendicularis, erit æqualis minori & proportionalis inter segmenta maioris. Camp. 13. p. 16.

III. *Quænam est tertia?*

Est de angulis in oppositis sectionibus. Anguli in oppositis sectionibus æquantur alternis angulis secantis & contiguæ. Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον: ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. 32. p. 3.

Quomodo demonstratur?

Theon deducit ex angulo semicirculi. At ista propositio generaliter proponit de angulis in sectione: & probari potest ex eadem generali causa angulorum in oppositis sectionibus ad 22. p. 3. Item è triangulo rectangulo, ex qua deducitur æqualitas anguli in semicirculo, quòd rectus sit qui sit trianguli reliquis angulis æqualis. Itaq;,

I. Trianguli tres anguli, æquantur duobus rectis per 9. e. 6.
   At trianguli in semicirculo anguli tres sunt.
   Trianguli igitur in semicirculo angulis duob. rectis sunt æquales.

II. Rectus angulus in triangulo, est æqualis reliquis angulis.

At an-

At angulus in ſemicirculo eſt rectus. per 18. e. Eſt ergo reliquis æqualis.

Quæ'nam ſequuntur ex hac propoſitione?

Duo problemata: quæ Theon demonſtrat. At ſi uerbis expreſſa eſſent, demonſtrationibus nullis opus eſſet, conſectaria ſpecialia eſſent, ut nobis ſunt.

Quod'nam eſt primum conſectarium?

Si ad terminum datæ rectæ æquetur angulus rectilineus dato, & ab æquati uertice perpendicularis reliquo lateri concurrat cum perpendiculari à medio datæ: concurſus erit centrum circuli per æquatum angulum deſcripti, in cuius oppoſita ſectione ſuper datam angulus æquabitur dato. Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 33. p. 3. Quod in tribus generibus anguli licet experiri, eodem ſemper argumento. Atque hinc licet ſectionem deſcribere ſuper datam rectam, quæ capiat angulum rectilineum æqualem dato.

Quod'nam eſt ſecundum?

Si angulus ſecantis & contiguæ æquetur dato angulo rectilineo, angulus in oppoſita ſectione eidem pariter æquabitur. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 34. p. 3. Atque hinc licet à dato circulo ſectionem ſecare, in qua ſit angulus æqualis dato. Quapropter hæ ſunt opes anguli in ſemicirculo, ab Ariſtotele ideo tantopere appellati.

Quæ'nam ad extremum eſt ſingularis & mirifica peripheriæ natura?

Angulus ſectionis maioris eſt maior recto. Angulus ſectionis minoris eſt minor recto. Ergo æqualis ſectionis uel ſemicirculi angulus eſt æqua-

lis recto? Euclides nominatim hic nihil respon det, qui tamen dixit ad 16.p. 3.angulum semicirculi maiorem esse quouis acuto rectilineo, quod uidetur solum recto conuenire. Ex inæqualitate cum recto definitur obtusus & acutus: inter obtusum & acutum rectus est. Datur uerò in circulo maior recto uelut obtusus, datur minor recto uelut acutus; datur etiam minor quouis acuto & maior quouis acuto, ut inter peripheriam, rectamque perpendicularem media recta nequeat intercedere. Ecquid igitur (inquies) restat quin semicirculi angulus rectus sit? Certè rectus est in suo genere, & sic anguli recti dicuntur in sphæra & medius inter obtusum acutumque sui generis est, & generaliter ita perpendiculum definitum est. 12. e. 2. Angulus rectus ita definitus. 8. e. 3. Mirabile itaque sit angulo nihil addi posse, quo maior acuto fiat & tamen maiorem esse. cui nihil præter unicam lineam accessit. Datur maius, datur minus, cur non datur æquale? & quidem datur id inter quod & æquale, ne recta quidem possit intercedere. Angulum tamen rectum rectilineum maiorem esse recto circulari, geometria conuincit. Datur igitur in circulo ratio inæqualitatis maioris & minoris, non datur ratio æqualitatis.

LIBER XVII. De Adscriptione circuli & trianguli.

Geometria plani rectilinei & circuli adhuc fuit: sequitur utriusque adscriptio, quæ primo libro generaliter definita est.

Quottuplex est adscriptio?

Duplex. Inscriptio & Circumscriptio. Itaque rectilineum inscribitur circulo, quando peripheria tan-

git angulos. 3. d.4. Circumſcribitur cùm à ſingulis lateribus peripheria tangitur.4.d.4. Tota igitur adſcriptio per latera aut angulos expeditur, in rectilineis termini latera ſunt, in circulo terminus eſt peripheria pro lateribus omnibus. Satis autem fuit definiri ſolam uel inſcriptionem uel circumſcriptionem, cùm ex una intelligatur altera.

Quæ nam figuræ adſcribuntur?

Homogeneæ & heterogeneæ. Homogeneæ, ut triangula triangulis, quadrangula quadrangulis, multangula multangulis. Heterogeneæ, ut tetraëdrum cubo, octaëdrum tetraëdro & cubo, cubus octaëdro, icoſaëdro dodecaëdrum.

DE ASSCRIPTIONE CIRCVLI.

Quot ſunt elementa de adſcriptione circuli?

Quatuor.

I. *Quod nam eſt primum?*

Si rectilineum adſcriptum (inſcriptum uel circumſcriptum) circulo eſt æquilaterum, eſt æquiangulum.

Quot ſunt huius elementi partes?

Duæ. Vna de inſcripto: altera de circumſcripto.

Quomodo demonſtratur de inſcripto?

De triangulo res patet per ſe. Quia ſi eſt æquilaterum, eſt æquiangulum per 2.c.10.e.6. In triangulato autem res demonſtranda eſt. Itaq;,

Inſcriptæ æquales, ſubtendunt peripherias æquales, per 19. e. 15. & faciunt ut anguli in peripheria, inſiſtentes in peripherijs æqualibus, æquentur.

At rectilineum æquilaterũ circulo inſcriptum, habet inſcriptas æquales.

Rectilineum igitur æquilaterum, ſubtendit pe-

ripherias æquales & ſic anguli in peripheria, inſiſtentes in peripherijs æqualibus, æquantur.

Quomodo demonſtratur de circumſcripto?

Si rectilineum circulo ſit circumſcriptum, hoc item uerum eſt. Nam,

Triangula æquilatera ſunt æquiangula.

At in rectilineo quod circulo circumſcriptum eſt, ſunt triangula utrinque æquilatera: quæ faciunt perpendiculares à centro in latera circumſcripti, ductis in angulos radijs.

In rectilineo igitur circumſcripto ſunt triangula æquiangula.

Quod nam eſt hic conſectarium?

Rectilineum æquilaterum circulo adſcriptum, æquatur triangulo æqualis, baſis quidem perimetro, altitudinis autem perpendiculari. Vt patet in triangulo & triangulato.

Quomodo in triangulo?

Triangula in æquali baſi, ſunt æqualia. 1.c.e.7.

At in uno triangulo adſcripto, ſunt tria triangula æquealta.

In uno igitur triangulo adſcripto triangula ſunt æqualia.

Quomodo in triangulato, ut quadrato?

Idem eſt: quatuor enim triangula ſunt æquealta. Denique rectilineum quodlibet æquilaterum adſcriptum circulo æquabitur triangulo baſis æqualis perimetro ipſius adſcripti: quia perimeter continet baſes triangulorum, in quę rectilineum reſoluitur.

II. *Quod nam eſt ſecundum?*

Rectilinea ſimilia circulis inſcripta, ſunt ut à diametris quadrata. Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστι, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 1.p.12.

Quot ſunt hic conſideranda?

Tria. Elenchus, Demonſtratio & Conſectarium.

Quis

Quis est Elenchus?

Euclides hîc elenchum commisit speciei pro genere. Proponit enim de multangulis, quod omnium rectilineorum commune est: imò omnium omnino figurarum commune est.

Quae nam est demonstratio?

Demonstratio non obscura est: causam tamen aliam nullam habet, sed propositio ipsa suae ueritatis causam continet è diametro & similitudine figurarum. Itaque,

> Plana similia habent duplicatam rationem homologorum laterum. 1. e. 6.
> At in rectilineis inscriptis diametri sunt homologa latera uel sunt proportionales lateribus homologis.
> In rectilineis igitur inscriptis duplicata est ratio.

In triangulis autem rectangulis similibus, diametri sunt homologa latera: in triangulis obliquangulis similibus, diametri sunt proportionales homologis lateribus. Itaque,

> Si latus rectilinei ad latus rectilinei, est ut basis ad basim: diametri erunt proportionales homologis lateribus.
> At ex thesi in triangulis obliquangulis similibus, latus rectilinei ad latus rectilinei, est ut basis ad basim.
> Ergo in triangulis obliquangulis, diametri sunt proportionales homologis lateribus.

Idem erit in triangulatis similibus, cùm per 2. e. 10. resoluentur in triangula similia.

Quod nam est consectarium?

Si sit ut diameter circuli ad latus rectilinei inscripti, sic diameter secundi circuli ad latus secundi rectilinei inscripti, triangulaque inscriptorum singularia similia similiterque sita: rectilinea inscripta e-

runt similia similiterque sita. Id Euclides sic sumpsit ad 2.p.12.& quidem ut uidetur è 18.p.6. & nos ideò assumpsimus. Adscriptio est cum triangulo quolibet: cum triangulato autem duntaxat ordinato: & quidem adscriptio circuli est communis.

III. *Quod'nam est tertium?*

Si duæ rectæ bisecent duos angulos dati rectilinei, circulus radij ab earum concursu in latus perpendicularis inscribetur dato rectilineo.

Quæ'nam est eius demonstratio?

Demonstratio ductis in reliqua latera perpendicularibus facilis est è 26.p.1. Atque hæc propositio tria eadē puncta continet, quæ 9. & 25.p.3.& inscribere triangulo circulum, non aliud est quàm peripheriam per tria trium angulorum puncta ducere. Itaque, quod ad triangulum attinet,

Punctum in circulo quod est terminus trium rectarum in peripheriam, est centrum circuli. c.13.e.15.

At in triangulo duæ rectæ bisecantes duos angulos, cum perpendiculari concurrunt in puncto quod est terminus trium rectarum in peripheriam æqualium.

In triangulo igitur est centrum circuli. Vel:

Vbi bisecantes cum perpendicularibus faciunt triangula æquilatera, ibi tres perpendiculares (quæ sunt bases æquilaterorum) æquales erunt, & ex earum concursu seu cētro radius describet circulum, per c.13.e.15.

At in triangulo bisecantes cum perpendicularibus faciunt triangula æquilatera per 2.e.7.

In triangulo itaque tres perpendiculares equales sunt, & ex eorum concursu seu centro radius describet circulum.

Idem argumentum erit de triangulato, ut quadrato.

IIII. *Quod'-*

IIII. *Quod'nam est quartum?*

Si duæ rectæ rectè bisecent duo latera dati rectilinei, circulus radij ab earum concursu in angulum circumscribetur dato rectilineo. 5. p. 4.

Quænam est demonstratio?

Theon deducit demonstrationem per tres species acutanguli, rectanguli, obtusanguli. Sed demonstratio eadem superiori facilis est per 4. p. 1. & 9. p. 3. Nam,

Vbi tres radij æquantur, ibi punctum est centrum.

At in triangulo tres radij æquantur per 2. e. 7.

In triangulo igitur punctum illud seu concursus est centrum per c. 13. e. 15.

Atque hæc est communis adscriptio circuli: sequitur adscriptio rectilinei.

DE ASSCRIPTIONE TRIANGVLI.

Quottuplex est adscriptio rectilinei?

Duplex. Trianguli & Triangulati.

Quot sunt elementa de asscriptione trianguli?

Duo. Vnum de inscriptione: alterum de circumscriptione. Euclides uocat ἐγγράψαι & περιγράψαι.

Quod'nam est de inscriptione?

Si duæ inscriptæ à contactu rectæ & peripheriæ æquent duos utrinque angulos duobus angulis dati trianguli: connexæ inscribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo. 2. p. 4. Hæc inscriptio generalis est & communis omnium triangulorum. Potest enim dari quodlibet æquilaterum æquicrurum, uarium, rectangulum, obtusangulum, acutangulum.

Quomodo demonstratur?

Si bini anguli duorum triangulorum æquantur, reliqui æquantur, c. 3. e. 7.

At duę

At duæ inſcriptæ à contactu rectæ & peripheriæ æquant cum tangente duos utrinq; angulos duobus angulis dati trianguli: & connexæ æquant per 17. e. 15. angulis alternorum ſegmentorum.

Ergo cùm bini æquentur, reliquus æquabitur reliquo.

Quodnam eſt de circumſcriptione?

Si duo anguli in centro dati circuli æquentur ad commune latus exterioribus angulis dati trianguli, rectæ tangentes peripheriam in cruribus angulorum circumſcribent triangulum dato circulo æquiangulum dato triangulo, 3.p.4.

Quænam eſt eius demonſtratio?

Eſt per conſectarium è 32.p 1.ſeu 9.e.6. Nam,

In quadrangulo anguli quatuor interiores æquantur quatuor rectis.per 4.e.10.

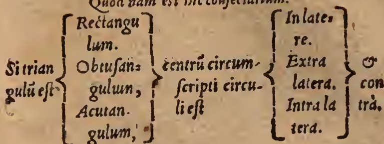
At hic duo ſunt recti: per fabricam ex ſecante & contigua à contactu per centrum. per 1. c.15.e.15.

Reliqui ergo duo oppoſiti æquãtur duobus rectis, quibus æquãtur exterior & deinceps interior dati trianguli. Itaq; alter oppoſitorum ad centrum, æquatus eſt exteriori angulo dati trianguli : reliquus igitur ad uerticem per 13. p. 1. ſeu 1.c.8.e.5.& per axio.1.æquatur deinceps reliquo.

Idem erit de dati trianguli altero latere eiusque exteriore angulo & reliquo deinceps. Itaque tum binis æqualibus, reliqui æquabuntur.

Quod-

Quod'nam est hîc consectarium?



LIBER XVIII. De adscriptione triangulati.

Cuius'nam triangulati adscriptio hîc docetur?

Ordinati: in eaq; consideranda primò circumscriptio communis ex antecedente inscriptione: deinde specialis inscriptio.

Quæ'nam est circumscriptio communis?

Si rectæ tangant peripheriam in angulis inscripti triangulati ordinati, circumscribent triangulatum circulo, homogeneum inscripto triangulato. Exempla per species inscriptorum proponentur.

Quomodo fit specialis inscriptio?

Per unicum latus; quod repetitum quoties opus est, peripheriam totam subtendat & compleat. Id enim fecit Euclides in uno quindecangulo, nos in omnibus faciemus.

Quottuplex est illa inscriptio?

Duplex. Est enim quadratorum aut multangulorũ.

Quæ'nam est inscriptio quadrati?

Si diametri rectè intersecentur, subtensa recto erit latus quadrati. e.6.p.4.

Quæ'nam est hîc demonstratio?

Huc 22. p. 3. seu 12. e. 16. de quadrilateri inscripti duobus angulis oppositis æquantibus duos rectos propriè intercurrit. Itaque,

Qua-

Quatuor triangula rectangula æqualia cruribus & basibus, constituunt quadratum.

At diametris rectè intersectis, crura anguli sunt radij, quorũ diametri connexæ faciunt quatuor triangula rectangula æqualia cruribus & per 2.e.7. basibus.

Ideò diametris rectè intersectis, subtensæ inscribunt quadratum.

Quæ nam hîc sunt consectaria?

I. Quadratum inscriptum est dimidiũ circumscripti. Nam,

Latus circumscripti (quod hîc æquatur diametro circuli) potest duplum ad latus inscripti. per 47.p.1. uel 5.e.12.

Ergo quadratum inscriptum est dimidium circumscripti.

II. Quadratum inscriptum est maius dimidio cumscripti circuli. Quia circumscriptum quadratum (quod dupl[illegible]) est maius toto circulo. Ergo dimidium dupli e[illegible]us dimidio circuli.

III. Latus inscripti potest duplum circularis radij: ut patet per 47.p.1.

IIII. Si quadratum circularis radij duplicetur, latus duplicati erit latus inscripti quadrati. Ptol. lib. 1. cap. 9.

Quomodo circumscribitur quadratum circulo?

Si duæ perpendiculares ad extremas dati circuli diametros rectè bisectas concurrant, circumscribent quadratum dato circulo. Demonstratio uerò quòd sit circumscriptum, patet. 4.d.4. Nam,

Cùm à singulis quadrati lateribus peripheria tangitur, quadratum est circumscriptum.

At hic peripheria à singulis lateribus tangitur.

Quadratum igitur hîc est circumscriptum.

Quod

Quod autem sit quadratum, patet per 28. & 34. p. 1. Nam,

Rectangulū æquilaterum è duabus lineis perpendicularibus & lateribus oppositis parallelis, est quadratum.
At hîc tale est rectangulum.
Hîc igitur est quadratum.

Quid de reliquis speciebus quadrilateri?

Reliquas quadrilateri species Euclides præterit. Oblongū enim circulo inscribi potest & ei circulus circumscribi eadem uia qua triangulum & quadratum: circumscribi uerò circulo non potest, nec ei circulus inscribi, quia perpendicula à centro ad latera essent inæqualia. Ob eandem causam rhombus & rhomboides nec inscribi possunt, nec circumscribi. Trapezium aliquod potest inscribi, tumque si radij sint ad angulos inscripti trapezij trium laterum æqualium & quarti minoris, anguli in centro subtensi æqualibus erunt obtusi, minori subtensus acutus. è 17. p. 12. Quia circa centrum æquantur quatuor rectis. Quartus autem minor est recto. Tres igitur reliqui æquales inter se, sunt maiores recto. Trapezium igitur sic inscribi potest, circumscribi autem non potest: eaque de causa præterita est ista adscriptio ab Euclide.

Quænam est inscriptio multangulorum?

Est quinquanguli, sexanguli, decanguli, quindecanguli. Reliquis autem deinceps multangulis parilateris inscribendis opus est triangulo, cuius uterq; angulus ad basin sit multiplus reliqui, in quinquangulo primùm duplus.

I. Quot

I. Quot sunt consideranda in quinquanguli adscriptione?

Duo:
- Machinatio quæ
  - Fit è rectâ proportionaliter sectâ.
  - Reddit uicissim rectam proportionaliter sectam.
- Diametri asymmetria.

Quomodo recta proportionaliter secta machinatur quinquanguli machinationem?

Si recta secetur proportionaliter, trianguli crurum sectæ æqualium, basis maiori segmento æqualis, uterque angulus ad basim erit duplus reliqui, & basis erit latus quinquanguli in circulum cum triangulo inscripti. 10. & 11. p. 4.

Quot sunt hic consideranda?

Duo. Fabrica trianguli optati: & Demonstratio.

Quænam est fabrica trianguli?

Hic primum ad fabricam trianguli sumes pro radio rectam, per 3. e. 14. sectam proportionaliter: circulumque facies dicto radio, & per 5. e. 15. inscribes æqualem maiori segmento, inscriptamq; cum secta connectes. Hoc triangulum erit optatum. Nam per 10. e. 6. anguli ad basim æquantur, ut quòd de altero probatum sit, probatum quoque sit de reliquo. Ducatur itaque recta à secta & inscripta, & circulus circumscribatur per 6. e. 17. triangulo modò facto: hunc circulum tanget recta, quæ erit basis. Nam,

Si oblongum secantis & exterioris segmenti æquatur quadrato maioris segmenti, è duabus rectis reliqua tangit. 17. e. 15.

Át hîc

At hic ex thesi rectâ proportionaliter sectâ, oblongum tale æquatur quadrato reliquæ, cui æquata est ex thesi basis.

Hic igitur è duabus rectis reliqua tangit.

Quottuplex est hic demonstratio?

Duplex.

Quænam est prior?

Quòd uterq; angulus ad basim, sit duplus reliqui: Quod sic demonstratur.

Aequalis duobus ęqualibus inter se, duplus est alterius æqualium.

At unus angulus in basi tangentis, est ambobus in basi inscriptæ æqualis.

Ratio seu causa, quia
- *Anguli in alterno segmento per 20. e.16. æquantur.*
- *Reliquus æquatur sibiipsi.*

Consectarium de angulo.
- *Altero in basi, quod æquetur duobus eisdē: qa æquatus est angulo alteri in basi.*
- *Exteriore, quòd duobus eisdem æquetur per 2. c.9.e.6.*

Ideóq; segmenti,
- *Maioris*
  - *Latera æquantur. Anguli ad basin sunt æquales p 10.e.6.*
- *Minoris*
  - *Anguli in basi æquātur inter se quia æquales eidem.*
  - *Latera æquātur per 10.e.6.*

Vnus igitur angulus in basi tangentis, est duplus alterius æqualium.

Quænam est demonstratio altera?

Quòd basis sit latus quinquanguli æquilateri in circulum cum triangulò inscripti. Nam si duæ rectæ, inscripti trianguli utrumq; angulum reliqui duplum bisecantes, connectantur & inter se & cum angulis: inscribent circulo quinquangulum æquilaterum, cuius unum latus erit ipsa basis. Nam,

Vbi anguli in peripheria æquantur: ibi subtensæ peripheriæ per 6.e.16. æquantur: ideoque per 19.e.15. subtensæ rectæ.

At in quinquangulo æquilatero in circulum inscipto cum triangulo, anguli in peripheria quinq; æquantur.

In tali igitur quinquangulo, æquantur quinq; peripheriæ subtensæ: ideoq; quinq; subtensæ rectæ: & ex ijs quinq; rectis unaquæq; est latus quinquanguli æquilateri.

Ex hac demōstratione sequitur æquilaterum adscriptum circulo esse æquiangulum. Atq; in isto elemento ἐφάρμοσις in primis egregia est, quinq; circulorum in uno circulo consideratorum, qualis adhuc nulla fuit. Ergo recta proportionaliter secta ita quinquāguli adscriptionem machinatur: indeq; uicissim redditur linea proportionaliter secta.

Quomodo secatur recta proportionaliter per quinquanguli adscriptionem?

Si duæ rectæ subtendunt duos deinceps angulos inscripti quinquanguli, secantur proportionaliter, & maiora segmenta sunt latera inscripti. Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. 8.p.13.
Hìc etiam duo consideranda sunt, Fabrica & Demonstratio duplex.

Quænam

Quânam est fabrica?

Cùm duæ rectæ ſubtendunt duos deinceps angulos inſcripti quinquanguli, fiunt bina triangula æquiangula per theſim & 2.e.7. Itaq; unius trianguli bini anguli æquãtur, & ideò reliquus reliquo æquãtur, per c.3.e.7.

Quænam eſt prior demonſtratio?

Quòd recta ſecatur proportionaliter. Nam,

Duo triangula æquiangula, ſunt proportionalia cruribus 9.e.7.

At hîc duo ſunt triangula æquiangula.

Sunt igitur proportionalia cruribus. Nam ut tota recta eſt ad latus quinquanguli, id eſt, ut mox patebit ad maius ſegmentum: ſic maius ſegmentum ad minus. Itaq;,

Recta ſi fuerit ut tota ad maius ſegmentum, ſic maius ſegmentum ad minus: ſecatur ſecundum mediam & extremam rationem, id eſt proportionaliter. 1.e.14.

At hîc recta talis eſt.

Recta igitur hîc ſecatur proportionaliter.

Quânam eſt altera demonſtratio?

Quòd maiora ſegmenta ſint latera inſcripti quinquanguli. Nam,

Eidem æqualia inter ſe ſunt æqualia

At latus quinquanguli & maius segmentũ æquantur alteri lateri quinquanguli: nimirum
- *Latus per thesim.*
- *Maius segmentũ per 10. e.6. Nã,*
  - *Eiusdem duplicia, æquantur.*
  - *At anguli ad basim sunt eiusdem duplices: quia alter per 3.e.9.e.6. æquatur duobus interiorib. æqualibus per 10.e.6. & proximam conclusionem.*
  - *Anguli igitur ad basim æquantur.*

Latus igitur quinquanguli & maius segmentũ sunt æqualia: & ideò maiora segmenta sunt latera inscripti.

Quid hinc deducitur?

Fabrica pentagoni ordinati super datam rectam. Nam si data recta secta proportionaliter, cõtinuetur utrinq; maiore segmento, sexq; peripheriæ radio datę concurrant, binæ utrinq, à terminis datæ & continuatæ, duæ reliquæ ab earum peripheriarũ concursu: rectæ per concursus & terminos datæ, cõstituent super datam quinquangulum ordinatum.

Quæ nam est asymmetria diametri?

Si diameter circuli quinquangulo circumscripti est rationalis, est irrationalis ad latus quinquanguli inscripti. Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον, πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων ων.11.p.13. Sic antèa segmenta rectæ pro-

ctæ proportionaliter sectæ irrationalia fuerunt. Et hæc propositio demonstratur demonstratione omnium prolixissima & odiosissima. Satisfactio ad eum elenchum erit eadem quę fuit in scholis Rami in præfationem decimi libri. Reliqua deinde triangulata multiplicata à laterum ternario, quaternario, quinario possunt inscribi circulo per inscriptum triangulum, quadratum, quinquangulum. Itaque per triangulum inscribetur triangulatum angulorum 6. 12. 24. 48: per quadratum inscribetur triangulatum angulorum 8. 16. 32. 64: per quinquangulum inscribetur triangulatum angulorum 10. 20. 40. 8. & sic deinceps.

II. Quot sunt consideranda in Sexanguli inscriptione?

Duo: Fabrica & potentia lateris inscripti trianguli.

Quænam est fabrica sexanguli?

Radius circuli est latus inscripti sexanguli. è 15. p. 4. Hic quatuor sunt consideranda, demonstratio, admonitio Campani, ἐφάρμωσις & consectaria.

Quænam est demonstratio?

Prius proponenda est fabrica. Itaq; sexangulum inscribitur per triangulum æquilaterum inscriptum bisectis tribus angulis: sed breuius inscribitur per radium sexies deinde inscriptum. Vt in circulo è diametri termino per radium describatur peripheria utrinq; circulum attingens & à punctis tactus ducantur diametri duo per circuli centrum ad peripheriã: hæ connexæ & inter se & cum diametro, inscribent sexangulum æquilaterum dato circulo lateris radio æqualis: & æquiangulum: quod utrumq; demonstrandum est. Demonstratio autem quòd æquilaterum, per sex angulos æquales in centro, item quòd æquiangulum, per 27. p. 3. licet neq; difficilis neque inelegans: attamen per triangulum, à quo multipli-

catur, uel per radium, qui sextam partem peripheriæ subtendit, æqualitas laterum fiebat: æqualitas autem angulorum inde erat, quod adscriptum æquilaterum sit æquiangulum. Sed demonstremus utrumque primò quòd sit æquilaterum: Nam,

Anguli in centro æquales, habent bases (id est, rectas & peripherias in quibus insistũt) ęquales & inter se & radio dati circuli.

At in sexangulo inscripto omnes sex in centro sunt æquales: quod demonstrabitur.

In sexangulo igitur inscripto bases omnes sunt æquales & inter se & radio dati circuli. Inscriptum igitur sexãgulum è radio circuli est æquilaterum.

Assumptio demonstratur primò de duobus angulis utrinq; à radio & tertio deinceps: secundò de reliquis ad uerticem. Quod igitur ad duos utrinque à radio attinet:

Triangula æquilatera sunt æquiangula.

At in inscripto sexangulo duo sunt utrinque à radio triangula æquilatera, tum
- *Sinistrũ: Nam,*
  - *Eidẽ æqualia, inter se sunt æqualia.*
  - *At basis & latus trianguli sinistri, æquantur eidem radio per c. 17. e. 4. quia diametrorum radij sunt æquales.*
  - *Basis igitur & latus trianguli sinistri æquantur.*
- *Dextrum, eadem de causa: ut & tertium deinceps.*

Itaq;

Itaq; in inſcripto triangulo, duo ſunt triangula æquiangula. Anguliq; duo in centro ſunt $\frac{2}{3}$ recti, ideoq; æquales & angulus tertius deinceps eſt $\frac{1}{3}$ duorum rectorum per 1. c.8.e.5. quia recta inſiſtit in rectam quæ angulos deinceps æquat duobus rectis.

Quod igitur iam ad reliquos attinet:

Duæ rectæ interſectæ, æquāt angulos ad uerticem 2.c.8.e.5.

At in inſcripto ſexangulo duæ rectæ ſunt interſectæ, ut patuit in fabrica.

Aequant igitur angulos ad uerticem. Quare ſex ſunt æquales: bis enim terni ſunt æquales.

Atq; ſic demonſtratum eſt ſexangulum eſſe æquilaterum. Secundò demonſtremus quòd ſit æquiangulum: Nam,

Cum adſcriptum æquilaterum, eſt æquiangulum: tum etiam inſcriptum æquilaterum, eſt æquiangulum

At hic adſcriptum ſexangulum ęquilaterum, eſt æquiangulum, per 1.e.17.

Hic igitur inſcriptum ſexangulum æquilaterū, eſt æquiangulum.

Quænam eſt admonitio Campani?

Campanus hic admonuit, quòd æquilaterum adſcriptum ſit æquiangulum, quod nos ſequimur & docemus generaliter ac ſemel uti decuit, non iteramus ſępius, ut tandem in extrema ſpecie moneamus de genere.

Quænam eſt ἐφάρμοσις;

Ἐφάρμοσις huius propoſitionis ualdè eſt inſignis. quæq; in unum circulum ſex circulos congruentes intelligit, quomodo liceat & innumerabiles in uno concipere, & ἐφάρμοσις tamen fiat cogitatione, ut to-

ta mathematica ἀφαίρεσις, quæ contraria est ἰφαρμόσ.

Quot sunt hîc consectaria?

Duo: I. Sexangula tria ordinata complent locũ, Nam resolutis sexangulis in sex triangula, sex triangula sunt æquilatera: uel ita,

Quatuor recti complent locum planum.

At triplex angulus sexanguli ualet $\frac{12}{3}$ recti, id est, quatuor rectos. Nam quilibet angulus ordinati sexanguli ualet rectum & $\frac{1}{3}$ recti. Resolue igitur tres rectos in tertias, fiunt $\frac{9}{3}$: his adde $\frac{3}{3}$ fiunt $\frac{12}{3}$. Iam unus ualet $\frac{4}{3}$. ergo 3 ualent $\frac{12}{3}$.

Triplex igitur angulus sexanguli complet planum locum.

Quæ'nam præterea è planis figura complet locum?

Nulla. Nam,

Quatuor recti complent planum locum.

At quinquanguli triplex angulus faceret tantũ rectos 3 $\frac{3}{5}$: quadruplex faceret 4 $\frac{4}{5}$ quod amplius & maius est. Septanguli angulus duplex faceret tantum rectos 2 $\frac{6}{7}$: triplex 3 $\frac{9}{7}$. id est 4 $\frac{2}{7}$ quod plus est.

Quinquangulum igitur & septangulum non complent planum locum: & sic deinceps inducenti constabit tribus tantum planis ordinatis compleri planum locum.

Quódnam est alterum consectarium?

Si rectæ ab uno inscripti sexanguli angulo in tertium utrinq; angulum connectantur, inscribent triangulum æquilaterũ dato circulo. Theon deducit hoc ex 15.p.4. demonstratione. Nam,

Latera peripherijs æqualibus subtensa, sunt æqua-

qualia: per 19. e. 15.

At talis trianguli sexãgulo inscripti latera, sunt peripherijs æqualibus subtensa.

Sunt igitur æqualia: & uicissim per tale triangulum bisectis angulis sexangulum inscribitur.

Quænam est potentia lateris inscripti trianguli?

Latus inscripti trianguli æquilateri potest triplum circularis radij. Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ, δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. 12, p. 13. Nam,

Radius est tertia semipheriæ seu sexta totius peripheriæ.

At inscripta est radius per 6. e.

Inscripta igitur est tertia semi pipherię seu sexta totius peripherię. Itaq; cũ uno latere duæ tertiæ semiperipheriæ occupētur, occupatur & una tertia totius peripheriæ uno latere. Iam diameter per 7. e. 12. potest quadruplum radij, id est, ipsius inscriptæ: & per 18. e. 16. & 5. e 12. quadruplum idem possunt latus & inscripta. Tolle nunc inscriptam, latus poterit triplum radij. Atq; hæc de sexangula figura, id est, apum geometria.

Cur vocas sexangulum figuram apum geometriam?

Quia apis (ut ait Varro li. 13. de re rustica, cap. 16.) sexangulam cellam sibi architectatur, quot habet ipsa pedes, quod Geometræ ἑξάγωνον fieri in orbe rotundo ostendũt, ut plurimum loci includatur: quod idem Pappus & Geometricè & copiosè demonstrat in proœmio quinti libri. Reliquis multangulis & eorum multiplis opus esset triangulo utriusque ad basim anguli ad reliquum tripli in septangulo, quadrupli in nonanguio & sic deinceps: in cuius inuentio-

ne ueteres geometræ elaborarunt. Quidem (inquit Proclus ad 9.p.1.) ab Archimedis helicibus incitati in datam rationem dátum angulum rectilineum secuerunt, quorum considerationes cum ijs qui instituuntur contemplatu difficiles sint, in præsentia omittimus. Hæc ille. Geometricos tamen istos conatus libet ex Rami scholis in 4 librum elementorum proponere.

Quomodo secatur angulus data ratione, ut inde figura qualibet inscribatur?

Propositio Archimedis in helicibus ad hanc rem eiusmodi prima est: Si punctum lineam æqueueelociter permearit, spátia permeata erunt proportionalia temporibus. Vt si punctum permearit æqueueelociter rectam 8, spacium quidem 4 in tempore 2: spaciū uerò 4 in tempore itidem 2: erit spacium 4 ad spacium 4: ut tempus 2 ad tempus 2. Hinc conati sunt illi geometræ secare angulum rectilineum data ratione. Vt si trisecandus sit angulus: ducta helice & circulis, uno summo à centro, altero intermedio: recta ab intermedio circulo ad summam peripheriam trisecetur per 10.p.1. perque puncta sectionum peripheriæ sunto concentricæ extimo circulo: radijq; à centro per puncta sectæ helicis sunto in summam peripheriam. Angulus in centro secabitur data ratione: spatia autem æqueuelociter permeata sunt intersegmēta rectæ trisectæ, tempora sunt intersegmenta summæ peripheriæ. Itaq; cum permeata spacia sint proportionalia temporibus, tempora angulis in centro per 33.p.6: angulus in centro totus secabitur data ratione. Atq; ita de quocunq; angulo data ratione secanda. Iam si uoles triangulum inuenire cuius uterque angulus ad basim sit quomodolibet multiplus reliqui, hinc inuenies per angulum rectum sectum, ut prius data ratione.

Vt si requiras	*Triplum*	*Diuide rectum in partes,*	*Septem & senis partibus æquato angulũ ad basim utrumq;, ualentem nempe sex septimas, reliquus ad uerticem ualebit reliquas duas septimas.*
	Quadruplum		*Nouem.*
	Quintuplum.		*Vndecim.*

Et sic deinceps. Tum deniq; si uoles inscribere septangulum dato circulo, inscribe triangulum inuento triangulo æquiangulum per 2.p.4: basis trianguli erit latus septanguli, quomodo & Euclides 16. p. 4. inscripsit quindecangulum. Sed hic non potest per subductionem latus approbari: approbari tamen potest per æquales peripherias æqualibus angulis subtensas angulo ad basim, utroq; rursus ut prius trisecto. Sed hoc artificium (ut Proclus censuit) difficile sit rudibus, non solùm quia multiplex & uarium hic sit opus, sed quia ipsa temporum spacia in peripherijs & rectis proportio uix satis geometrica uideatur: tum quia circinus helicis nondum satis accuratus est, nec utilitas fortasse labori respondeat. Tentata est hæc generalis adscriptio à quibusdam recentioribus, sed refellitur à Petro Nonio. De ijs apud Pappum libro quarto plura leges. Atq; hæc de sectione anguli ex Archimede.

III. *Quot sunt consideranda in decanguli inscriptione?*

Duo: Fabrica & potentia lateris quinquanguli seu cõparatio decanguli & sexanguli cũ quinquãgulo.

Quæ nam

Quænam est eius fabrica?

Si latus ſexanguli(id eſt radius) ſecetur proportio naliter,maius ſegmentum erit latus decanguli. Pappus lib.5.th.24. & Campanus ad 3. p.14. Secetur enim radius ſeu latus ſexanguli per 3. e. 14. proportionaliter, & ſit recta æqualis maiori ſegmento,ſub tenſa angulo in centro. Dico ſubtenſam rectam latus eſſe decanguli. Nam ſi continuetur deinde toto radio,tota continuata per c.3.e.14.ſecabitur proportionaliter, & maius ſegmentum erit ipſe radius. Nam ſi recta continuata tota , ſecta eſt proportionaliter,eſt ut tota continuata ad maius ſegmentum ſeu radium,ſic radius ad ſubtenſam. Itaq; duo hic triangula ſunt æquiangula.Nam,

Triangula cruribus proportionalia & alternè parallela, intermedium angulum facientia,ideoque baſes in rectam continuas habentia: ſunt æquiangula. 11.e.7.

At hic ſunt duo talia triangula, prius è ſubtenſa, radio & recta à termino ſubtenſæ in centrum:alterum è radio,continuata & connexa in centrum.

Iſta igitur triangula ſunt æquiangula & angulus in centro ſubtenſæ inſiſtens æquatur angulo continuatæ & connexæ. At angulus, cui quatuor latera dimidiati decanguli ſubtenduntur quadruplus eſt anguli ſubtenſæ in triangulo priore.Itaq;,

Pars ſubdecupla decanguli , eſt latus decanguli.

At ſub-

At subtensa est pars decanguli subdecupla. Prosyllogismo. Nam,

Dimidij subquintuplum est totius subdecuplum.

At subtensa est dimidiati decanguli subquintupla: quod probabitur.

Subtensa igitur est totius decanguli subdecupla: & è contra tota peripheria ad subtẽsam decupla.

Subtensa igitur est latus decanguli.

Assumptio prosyllogismi sic probatur:

Si angulus, cui 4 latera dimidiati decanguli subtenduntur, est quadruplus ad angulum prioris trianguli: erit & peripheria ei subtẽsa, quadrupla ad peripheriam prioris trianguli: eritque tota peripheria dimidiati decãguli quintupla peripheriæ triangulo priori subtensæ.

At angulus cui 4 latera dimidiati decanguli subtenduntur, est quadruplus ad angulum prioris trianguli. Nam per 2. c.9.e.6. æquatur duobus interioribus angulis qui sunt in basi prioris trianguli (qui inter se æquales sunt per 3.c.5.c.5. & per 10.e.6.) ideoq; duplus est alterius, qui per eandem causam duplus est anguli ex continuata & connexa, qui angulo prioris trianguli in centro æqualis est. Itaq; angulus cui 4. latera subtenduntur est quadruplus ad angulum prioris trianguli in centro.

Itaq; & peripheria ei angulo subtensa, quadrupla est ad peripheriam prioris trianguli: estq; tota peripheria dimidiati decanguli, quintupla pe-

pla peripheriæ triangulo priori ſubtenſæ: & è contra, ſubtenſa, dimidiati decanguli ſubquintupla.

Quódnam eſt hîc conſectarium?

Si decangulum & ſexangulum inſcribãtur eidem circulo: rectã è latere utriuſq; continuata ſecabitur proportionaliter, & maius ſegmentũ erit latus ſexanguli: & ſi maius ſegmentum rectæ proportionáliter ſectæ eſt latus ſexanguli, reliquum erit latus decanguli. Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου, εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά. 9.p.13. Conuerſa demonſtratur à Campano: uerum ſumi poteſt ut conſectarium è demonſtratione antecedentis.

Quǽnam eſt comparatio decanguli & ſexanguli cum quinquangulo?

Si decangulum, ſexangulum, quinquangulum inſcribantur eidem circulo: latus quinquanguli poteſt latera reliquorum: & ſi rectè poteſt latera ſexanguli, & decanguli, eſt latus quinquanguli. Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. 10.p.13.]

Quot ſunt hîc conſideranda?

Diagramma & Demonſtratio utriuſq; partis.

Quódnam eſt diagramma?

Eſto latus inſcripti quinquanguli, ſexanguli, decãguli. Dico latus quinquanguli poſſe reliqua. Sunto enim perpendiculares duæ, prima quæ latus quinquanguli, ſecunda quæ latus decanguli biſecet: & concurſus ſecundæ perpendicularis cum latere quinquanguli notetur.

Quǽnam eſt demonſtratio antecedentis?

Demonſtrationis ſyllogiſmus eſt hic: quo demonſtramus

ſtratur duo oblonga ſeparatim æqualia quadratis ſexanguli & decanguli eſſe. Nam,

Oblonga è latere quinquanguli & eius ſegmentis, æquantur quadratis reliquorum laterum.

Sed quadratum ex eodem toto latere, æquatur oblongis è toto & ſegmentis per 3.e.13.

Igitur & quadratis reliquorum laterum.

Quæ nam pars huius ſyllogiſmi dubia eſt?

Sola propoſitio: demonſtretur igitur.

Si bini anguli duorum triãgulorum æquantur, reliqui æquantur e.3.e.7.

At in iſtis duobus triangulis bini anguli æquantur.

Reliquus igitur reliquo æquatur. Sunt igitur duo triangula æquiangula. Itaq;,

Duo triangula æquiangula, ſunt proportionalia cruribus 9.e.7.

At hic ſunt duo triangula æquiangula.

Sunt igitur proportionalia cruribus. Vt enim latus a e ad e i: ſic e i ad e y. Itaq; per 4.e.12. oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ.

Iam connectantur o y, duo rurſus triangula æquiangula ſunt. Itaq;

Si tres rectæ ſunt proportionales, oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ, 4.e.12.

At hic tres rectæ, ſunt proportionales.

Hic igitur oblongum extremarum æquatur quadrato mediæ: propoſitioque ſyllogiſmi uera eſt, quod demonſtraſſe oportuit.

Quid de conuerſa?

Conuerſam huic manifeſtam uſurpat Euclides 16. p.13.

IIII. Quænam est inscriptio Quindecanguli?

Si triangulum & quinquangulum inscribantur eidem circulo ad idem punctum: recta inscripta inter utriusq; basim dicto puncto oppositam, erit latus inscripti quindecanguli. 16.p.4. Latus enim trianguli subtendet $\frac{1}{3}$ totius peripheriæ: duo latera quinquanguli subtendent $\frac{2}{5}$: è quibus si tollas $\frac{1}{3}$ relinquetur $\frac{1}{15}$. Hic opus est reductione terminorum, hoc modo.

$$\begin{matrix} 6 & & 5 \\ \frac{2}{5} & \times & \frac{1}{3} \\ 5 & & 3 \\ & 15 & \end{matrix}$$

Hic pro $\frac{2}{5}$ & $\frac{1}{3}$ habes $\frac{6}{15}$ & $\frac{5}{15}$. Sublatis igitur $\frac{5}{15}$ de $\frac{6}{15}$ manet $\frac{1}{15}$.

Quodnam est hic corollarium?

Si quinquangulum & sexangulum inscribātur eidem circulo ad idem punctum, peripheria inter utriusque latera erit pars tricesima totius peripheriæ. Itaque triangulatorum ordinatorum quadrati, quinquanguli, sexāguli, decanguli, quindecanguli inscriptio prompta erit latere unico, quod repetitū quoties opus est, peripheriam totam subtendat.

LIB. XIX. De Geodæsia multanguli ordinati & circuli.

Ex adscriptione circuli & rectilinei ducitur geodæsia multangulorum ordinatorum, atque in primis ipsius circuli. Concursus enim bisecantium duos angulos est centrum circumscripti circuli, ab eoque ad angu-

angulum radius:tumq; si quadratum è dimidio lateris, tollatur è quadrato de radio, latus reliqui erit perpendicularis per 5.e.12. Itaq; speciale theorema hic ita instituitur.

> Planus è perpendiculari à centro in latus & dimidio perimetri, est area multanguli ordinati.

Exempla sunt in quinquangulo & sexangulo.

Quomodo in quinquangulo?

Esto quinquangulum ordinatum cuius radius sit 10.latus 12. Hic quadratum è 10.radio est 100.quadratum è 6. dimidio lateris est 36. quo illinc deducto, reliquum est 64 quadratum perpendicularis ex octies octo, cuius latus 8 est ipsa perpendicularis. Iam perimeter totius quinquanguli est 60.cuius dimidium est 30. Itaque ex 8 perpendiculari & 30 dimidio perimetri planus, est 240 area quinquanguli. Demonstratio hic etiam est certæ illius antecedentis caussæ. Nam de quinque triangulis in quinquangulo planus 48 è perpēdiculari 8 & dimidio basis 6, est unum triangulum:quintuplex igitur(id est,quinquies 48) facit totum 240. Quasi diceres ex theoremate proposito:

> Planus è perpendiculari à centro in latus & dimidio perimetri, est area quinquanguli ordinati.
>
> At 240 est planus è perpendiculari & dimidio perimetri. Est enim illa multiplicatio perpendicularis per semiperimetrum, quæ est in perpendiculari & dimidio basis.
>
> Igitur 240 est area quinquanguli.

Quomodo in sexangulo?

In sexangulo ordinato radius per 4. e. 18. notus est è latere sexanguli: quia radius circuli est latus inscripti sexanguli. Esto igitur sexangulum ordinatum cuius latus sit 6: erit radius etiam 6. Iam qua-

Q dratum

dratum è radio 6 est 36, quadratum è dimidio lateris est 9, quo illinc subducto, reliquum est 27 quadratum perpēdicularis: latus igitur eius est $5\frac{1}{5}$ perpendicularis ipsa, ex qua & 18 semiperimetro planus est area sexanguli. Denique in omnibus multangulis ordinatis theorema satisfaciet.

DE TETRAGONISMO SEV *dimensione circuli.*

Atque hæc geodæsia est multanguli ex adscriptione, unde etiam est dimensio circuli, τετραγωνισμὸς quadratura circuli uulgò dicitur: argumentum geometris omnium ferè ætatum propositum in quo sese exercerent. Bryso, Antipho, Euclides, Archimedes, Apollonius, Porus: atque è recentioribus Boëthius, Campanus, Cusanus, Regiomontanus, Orontius hic elaborauêre. Quidam etiam τετραγωνισμὸν impossibilem credidêre. Quæstionis nodus est in ratione diametri & peripheriæ.

Quænam est ratio diametri & peripheriæ?

Peripheria est tripla diametri & ferè sesquiseptima. Hæc ratio (ut apud Heronem est) Euclidi & antiquis geometris nota fuit. Quod enim tripla sit, sex radij, id est, tres diametri indicant, quibus peripheria per 6.e.18. est circumscripta, & ideò (quia continens) maior. Nam,

> Circūscripta ceu continens est maior inscripta.
> At peripheria est sex radijs .i. tribus diametris circumscripta, eosq; continet.
> Peripheria igitur est maior tribus diametris inscriptis.

Excessus uerò non planè est sesquiseptima. Deest enim unitas unius septimæ: & excessus idem longè maior est quàm sesquioctaua. Itaque quia differentia uicinior erat sesquiseptimæ, assumpta est sesquiseptima: uera quippe propinquum pro ipso uero.

Quot sunt consideranda in hac ratione?

Duo. Demonstratio Archimedis & Consectaria.

Quænam est demonstratio Tetragonismi Archimedea?

Est ualdè operosa: si quis tamen curiosus requirat, materiam exercendi ingenij prorsus Archimedeam è scholis Rami Mathematicis circa finem libri quarti accipito: cuius hæc est delineatio. Verùm in dimensione circuli Archimedes elegit 96, numerum multis modis compositum, propterea; etiam multis modis diuiduum. Eius enim quotæ partes duodecim sunt:

1	96.
2	48.
3	32.
4	24.
6	16.
8	12.

Quod igitur peripheria non solùm est tripla diametri, sed etiam quòd paulò minor quàm sesquiseptima diametri, maiorq; decem septuagesimis primis, ideoq; una octaua, simul demonstratur ab Archimede comparatione illic maiorum, hic minorum.

Nam perimeter multãguli æquilateri laterũ 96 circulo

Circumscripti, illic est tripla diametri, sed præterea non planè sesquiseptima, ideoq; peripheria inscripti circuli erit tripla quidem, sed paulò etiam minor quàm sesquiseptima: ut 27 ad 7.

Inscripti, hîc est tripla & plusquam superdecies partiẽs septuagesimas primas, ideoq; peripheria circuli erit tripla & plusquã superdecies partiens septuagesimas primas, ideoq; plusquam sesquioctaua: ut 223 ad 71.

$\frac{27}{7}$ ($3\frac{6}{7}$ $\frac{223}{71}$ ($3\frac{10}{71}$

Totus labor eſt in adſcriptione talis multanguli in quintuplici ſectione recti anguli, & in dimetiendis quinq; triangulorum lateribus. Prima ſectio eſt trifariam, reliqua bifariam, ut habeatur quatuor rectorum centrum occupantium $\frac{1}{96}$ unde per peripheriam ſubtenſam habeatur nonageſimum ſextum latus adſcribendi multanguli. Labor itaque in tali multangulo adſcribendo duplex eſt: primus in circumſcribendo, alter in inſcribendo: & quæ ſequuntur, ut



His per totum tetragoniſmum benè obſeruatis, tota demonſtratio facilior erit: nec neceſſe eſt huc totam tranſſcribi.

Quę nam

Quænam sunt consectaria ex ratione diametri & peripheriæ?

Quatuor. I. De area circuli. II. De ratione quadrati diametri ad circulum. III. De dimensione circularium partium. IIII. De capacitate circuli.

I. *Quænam est area circuli?*

Planus è radio & peripheriæ dimidio est area circuli. Sic 7 radius è dimidio diametri 14 multiplicans 22 dimidium peripheriæ 44: facit oblongum 154.

Cur autem hîc binorum laterum dimidia assumuntur?

Quia in diametro duo latera opposita, item in perimetro duo reliqua opposita rectanguli continentur. Itaque binorum dimidia duntaxat assumuntur, à quibus compræhenditur rectangulum.

II. *Quænam est ratio quadrati diametri ad circulum?*

Vt 14 ad 11, sic quadratum diametri ad circulum. Hîc enim tres proportionis termini dantur potestate: quartus multiplicatione tertij per secundum & facti diuisione per primum inuenitur: ut hîc quadratum è diametro 14 est 196: quo per 11 multiplicato factus 2156 diuidatur per 14, quotus erit 154 pro quæsito circulo, quod è dimensis quadrato & circulo per analysin nascitur. Nam ratio 196 ad 154 est ratio 14 ad 11, ut reductis terminis apparet.

```
  3             42
 14 (1 3/11    196 (1 3/11 154
 11            154          42
                            28
                            14
```

Hic uerò secundus, τετραγωνισμὸς Euclidis est apud Heronem, sed paulò secus propositus, hoc modo. Si de quadrato diametri tollantur $\frac{3}{14}$, relinquetur

Q 8 area

area circuli. Vt si 196 quadratum diuidatur per 14, quotus erit item 14; quæ ter sumpta sunt 42, & sublata de 196, relinquunt 154 quadratum æquale circulo. Quadratura igitur Euclidis ista Archimede antiquior est, & iucundum sit ab antiquis Geometris istam geodæsiam repetere, & tot Euclideis exemplis demonstrare geodæsiam geometrarum ingenijs nequaquam alienam esse: sed demonstratio rationis inuenta ab Archimede laudem rationis etiam Archimedeam fecit.

III. Quænam est dimensio circularium partium?

Ex eadem illa peripheriæ & diametri ratione nascitur dimensio circularium partium semicirculi, sectoris, sectionis maioris, minoris.

Quænam est area semicirculi?

Planus è radio & peripheriæ quadrante est area semicirculi. Vt in priore exemplo, diameter est 14, tota peripheria 44. Dimidium igitur diametri seu radius est 7, dimidium peripheriæ est 22, eiusque quadrans 11. Factus itaque à 7 radio multiplicante 11 quadrante peripheriæ, facit 77. Potest & ista dimensio fieri sumpto dimidio dimensi iam circuli. Sic 154 podismus seu area circuli diuisa per 2, facit 77.

Quænam est area sectoris?

Planus è radio & basis dimidio est area sectoris. Sunto tres sectores, primi & secundi basis sit 12 pedum, reliquus $7\frac{3}{7}$ diameter 10. Iam multiplica 5 dimidium diametri seu radium, per 6 dimidium basis, factus erit 30, area primi & secundi sectoris. Multiplica item 5 per $3\frac{5}{7}$, quotus erit $18\frac{4}{7}$, è quibus additis redditur area circuli $78\frac{4}{7}$.

Quænam

5				4	
3	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{7}$	25(3 $\frac{4}{7}$	30
15				7	30
3					18 $\frac{4}{7}$
18					78 $\frac{4}{7}$

Quæ nam est area sectionis maioris & minoris?

Si triangulum è duobus radijs & basi maioris sectionis addatur duobus in ea sectoribus, totum erit area sectionis maioris: sin detrahatur suo sectori, reliquum erit area minoris. Ad duos sectores 30 & 30, adde triangulum pedum 12: totus erit 72 area maioris sectionis. Tollatur idem triangulum 12 pedum de 18 $\frac{4}{7}$ tertio sectore: 6 $\frac{4}{7}$ reliquum erit area minoris sectionis.

IIII. *Quæ nam est capacitas circuli?*

Circulus è planis isoperimetris inæqualibus est maximus. Nam,

Figura ordinatissima & terminatissima est maxima. 11. e. 4.

At circulus est figura ordinatissima & terminatissima,

Circulus igitur est maximus.

Qua de re lubet Quintiliani locum lib. 1. cap. 10 aduersus ψευδογραφίας adiungere. Quis (ait) non ita proponenti credat? Quorum locorum extremæ lineæ eandem mensuram colligunt, eorum spacium quoq;, quod his lineis continetur, par sit necesse est? At id falsum est. Hic igitur duo consideranda sunt, Theoria & Praxis seu Vsus.

Quæ nam est Theoria?

Plurimum refert, cuius sit formæ ille circuitus, reprehensiq; à Geometris sunt historici, qui magnitu-

dines insularum satis significari nauigationis ambitu crediderunt. Nam,

Vt quæcunque forma perfectissima, ita capacissima est.

At circuli forma est perfectissima: uel, ut Quintilianus loquitur, illa circumcurrens linea si efficit orbem, forma est in planis maximè perfecta.

Circuli igitur forma est capacissima, ideoque amplius spacium complectitur, quàm si quadratum paribus oris efficiat: rursus quadrata triangulis, triangula ipsa plus æquis lateribus quàm inæqualibus.

Quæ nam est Praxis?

Sumamus facilimum exemplum ex iugeri Rom. mensura, quod ducentos & quadraginta in longitudinem, dimidium in latitudinem pedes habet. Hinc qui sit circuitus & quantum campi claudat, colligere expeditū est. At centeni & octogeni in quāq; partem pedes, idem spacium extremitatis, sed multò amplius clausę quatuor lineis areę faciunt. Id si computare quē piget, breuioribus numeris idem discat. Nam deni in quadrū pedes, quadraginta per oram, intra centum erunt. At si quindeni per latera, quini in fronte sint: ex illo quod amplectuntur, quartam deducent eodem circumductu. Si uerò porrecti utrinq; undeuiceni singulis distent, non plures intus quadratos habebunt, quàm per quot longitudo ducetur: quæ circum ibit autē linea, eiusdem spacij erit cuius ea quæ centum continet. Ita quicquid formæ quadrati detraxeris, amplitudini quoq; peribit. Ergo etiam id fieri potest, ut maiore circuitu minor loci amplitudo claudatur. Hoc in planis. Nam in collibus, uallibusq; etiā imperito patet plus soli esse quā cœli. Exempla apud Ramū subijciunt rem oculis. Primò quod ad consectariū ipsum attinet, tria sunt pla-

na iſoperimetra heterogenea, circulus, quadratum, triangulū æquilaterum: quæ ſingula perimetrū habent 24. Area circuli cuius peripheria 24 & diameter $7\frac{7}{11}$: eſt $45\frac{9}{11}$. At area quadrati cuius quodlibet latus habet ſena, eſt 36. Nam quater ſex, ſunt 24 perimeter: at ſexies ſex, multiplicatio laterum duorum, facit 36 aream. Sic area trianguli æquilateri, cuius quodlibet latus 8 eſt, habet in perimetro 24: in area $27\frac{39}{55}$, ut docet 9. e. & c. 8. e. 12.

```
                                 39
24. 12. 4. 48 192. 768.  3  8  8
        4                7  6  8  (27 39/49
        4                4  4  7
                         2  8
                            4  9
```

Quod autem ad exempla Quintiliani attinet. Duplex eorum ordo eſt: prior parallelogrammorū, alter triangulorum, quæ omnia in ſuo genere ſunt iſoperimetra. Prior rurſus duplex: nā priora duo ſunt iſoperimetra, ſicut & tria ſequentia. Priora duo ſunt quadratum, & oblongum: quadratū ſingulis lateribus 180 habet: quater igitur 180 addita faciunt 720 perimetrum: at duo latera multiplicata dant aream 32400. At oblongum binis lateribus 120 & binis 240 habet: quæ addita, faciunt etiam 720 perimetrum quadrato æqualem: ſed duo latera multiplicata, faciunt aream 28800: minorem quadrati area. Idem eſt in ſequentibus tribus parallelogrammis æqualis perimetri, quorum primum quadratum ſingulis lateribus 10 habens, perimetrum facit 40: at bina latera multiplicata, faciunt aream 100: Reliqua duo ſunt oblonga: quorū utrumq; cùm ſit quadrato iſoperimetrū, prius tamen aream habet 75, id eſt, tres quartas quadrati: poſterioris area eſt 19. Sequentia tria

triangula, item isoperimetra sunt, sed area æquilateri est $27\frac{3}{4}\frac{9}{9}$: æquicruri est $25\frac{2}{5}\frac{3}{1}$. Varij 24. Aequilateri dimensio paulò ante posita est: Aequicruri iuxta 9.e. & c.8.e.12. sic est.

24. 12. 3. 36. 108. 648.   2 2 3
3.   6 4 8 ($25\frac{2}{2}\frac{3}{5}$
6.   4 4 5
4 0
2 5

Varij dimensio sic est per 6.e.11. Sexies octo faciunt 48 aream totius parallelogrammi, cuius dimidiũ 24, est area trianguli rectanguli ex basi 6, altitudine 8.

LIBER XX. De Superficie gibba.

Quid est Gibbum?

Est superficies, quæ inæqualiter intra suos terminos interiacet. Non autem gibbũ quodlibet hîc definitur, sed quod sectum plano basi parallelo facit communi sectione peripheriam. Id si lubet, regulare nominetur.

Quottuplex est gibbum?

Duplex: Sphæricum aut Varium. Partitio respondet partitioni lineæ in peripheriam & helicem.

Quid est sphæricum?

Est gibbũ æquidistans à centro cõprehensi spacij. Fit autem cõuersione semiperipheriæ, manente diametro: è 14.d.11. Nam ut recto motu lineæ rectæ efficitur planũ sic motu peripheriæ efficitur sphæricum: atq; ut locis omnibus recta in plano, sic peripheria in sphærico duci potest.

Quot sint consideranda in sphærico?

Duo. Maxima peripheria & Geodæsia.

Quæ nam est maxima peripheria?

Maxima in sphærico peripheria est quæ sphæricũ bisecat. Sic Euclides 17.p.13. postulat maximũ sphæ-

ræ circulum esse, qui transit per centrum. i. qui sphæram bisecat. Maxima itaq; peripheria sphærici respondet diametro circuli. Itaq; peripheria propior maximæ est maior remotiore, & utrinq; distantes à maxima duæ sunt æquales. Similima hic repeti possunt ijs, quæ 12.13.14.e.15. proposita sunt.

Quottuplex est hic Geodæsia?

Duplex: Sphærici & Segmentorum sphæricorum. Hæc geodæsia analogia quadā respondet geodæsiæ circulari.

Quæ nam est geodæsia sphærici?

Planus è maxima peripheria & eius diametro est sphæricum. Sic igitur planus sphærici è diametro 14 & peripheria 44 est sphæricum 616. Vt autem antea circuli area est dimensa per rectangulum è tum dimidio diametri, tum peripheriæ: sic hic per totā & diametrum & peripheriam efficitur rectangulū prioris (154 in area circuli) quadruplum pro mensura sphærici: quia per 1.e.6.

Plana similia sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

At plana è dimidio & diametri & peripheriæ, eque tota & diametro & peripheria, sunt plana similia.

Sunt igitur in duplicata ratione homologorum laterum.

Quot sunt hic consectāriaq?

Duo. I. Planus è maximo circulo & 4 est sphæricum. Patet ex elemento proximo. Archimedes de sphæra demōstrat, sed præpostere, è conis sphæricū æquari quatuor maximis circulis.

II. Vt 7 ad 22, sic quadratum diametri ad sphæricū. Nam 7 & 22 sunt termini minimi in ratione diametri ad peripheriā. In circulo autem ut 14 ad 11, sic quadratum diametri ad circulū. Analogia respōdet, quia hic multiplicās per duplū & diuidis per dimidium.

dium: illic contra multiplicas per dimidium, dimidiū per duplum. Itaq; illic circulus simplex efficitur, hîc quadruplus. Hæc igitur est analogia circuli & sphærici, ex qua etiā est analogia segmentorū sphæricorū, ut hemisphærici, sectionis maioris & minoris.

Quæ nam est geodæsia hemisphærici?

Planus è maxima peripheria & radio est hemisphæricū. Vt è 44 peripheria & radio 7, est hemisphæricum. 308.

Quæ nam est geodæsia vtriusq; sectionis?

Si quota pars est radij perpēdicularis à centro ad basim sectionis maioris, tanta augeatur hemisphæricum, totū erit sphærici maior sectio: sin tanto minuatur, reliquū erit minor. Vt pars radij tertij, id est $\frac{3}{7}$ est à centro, quanta pars hemisphærici est 132. Additis igitur 132 ad 308 componentur 440 pro sphærici maiore sectione. Detractis autem relinquuntur 176 pro sphærici minore sectione.

Quid est Varium?

Est gibbum, cuius basis est peripheria, latus recta à termino uerticis in terminū basis. Hęc duplex affectio, communis est superficierū uariarū regularium: ut patet 18.20.21.23.d.11. Infinitæ uerò sunt species ut helicis, sic uarij: sed ab Euclide ex omni numero duæ species selectæ sunt, quas generali affectione complectimur.

Quotuplex est Varium?

Duplex: Conicum & Cylindraceum.

Quid est Conicum?

Quod à subiecta peripheria æqualiter fastigiatur ad uerticem. In eo consid. Fabrica & Geodæsia. Itaque quod ad fabricā attinet, fit conuersione lateris circa subiectā peripheriā. Quod ab Apollonio propositum primo conicorum, repetitur à Proclo ad 4.p.1.

Quæ nam est eius geodæsia?

Planus è latere & dimidio basis, est conicū. Sic ex latere

latere 13 & semiperipheria $15\frac{5}{7}$ planus est $204\frac{2}{7}$.

```
 13                          2
 15 5/7   13/1   5/7     6 5 (9 2/7
 ________________          7
                         6 3
 195
   9   2/7
 204
```

Hic planus $204\frac{2}{7}$ est superficies conica: cui si addideris subiectum circulum. tota superficies constabit.

```
 204 2/7
  31 3/7
 _______
 235 5/7
```

Quæ uerò de primarum figurarum æqua altitudine & reciprocatione dicta sunt, conicis etiam possint attribui, indeq; cylindraceis, tametsi ab Euclide hæc prætérita sint in superficie.

Quid est Cylindraceum?

Quod à subiecta peripheria ad sublimẽ ęqualem & parallelam peripheriam æqualiter erigitur. Hîc etiam duo sunt consid. Fabrica & Geodęsia.

Quæ nam est eius fabrica?

Fit conuersione lateris circa duas peripherias: æquales & parallelas. Hoc enim modo fabricatur Serenus.

Quæ nam est eius geodæsia?

Planus è sua basi & altitudine est cylindraceũ. Sic ex peripheria 22 (ut colligitur è 7 diametro) & altitudine 12. planus cylindracei est 464: quibus si addideris duas utrinq; bases, bis nempe $38\frac{1}{2}$ hoc est, 77, tota superficies erit 539. Atq; hæc hactenus de Geometria in linea & superficie.

FINIS GEOMETRIAE.

Τῷ θεῷ δόξα εἰς τοὺς αἰῶνας τῶν αἰώνων.

QVAESTIONES IN STEREOMETRIAM.

LIBER XXI. De lineis & superficiebus in solido.

Quid est Stereometria?


ST pars Geometriæ altera de corpore. Stereometria est in elementis exigua, & Plato lib. 7. de Rep. conqueritur hanc scientiam nondum inuentã, & quidem duabus de causis, quia difficilis, quia contempta: ideoq; publicis honoribus & præmijs excellentia ingenia excitanda ad tantæ rei indagationem. Itaq; Platonis uelut authoritate permoti Archimedes, Theodosius, Apollonius, Serenus, Pappus in uacuas possessionis huius partes ingressi, mirabiles structuras fecêre. Archimedes in libris de sphæra & cylindro de conoidibus, sphæroidibus, quadratura parabolæ, Theodosius in libris de sphæra, Apollonius in libris de conicis, Serenus in libris de sectione cylindri, Pappus in uarijs plerisq;, unde Euclidis inopia possit expleri.

Quid est Corpus?

Est lineatum latum & altum. 1.d.11. στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον. Longitudo enim sola est lineæ, longitudo & latitudo est superficiei, longitudo, latitudo, altitudo simul est corporis. Vnde perfecta magnitudinis trinitas agnoscitur, de qua Aristoteles primo de cœlo: quæ soliditas dicitur. Itaq; etiam solidum pro corpore ipso intelligimus.

Quinam est terminus solidi?

Terminus solidi est superficies. στερεοῦ δὲ πέρας, ἐπιφάνεια. 2.d.11.

Quot sunt consideranda in solido?

Tria. Rectæ, Superficies, Solida ipsa. In duobus prioribus perpendiculum & parallelismus, considerantur.

DE

DE RECTIS IN SOLIDO.

Quod'nam est perpendiculum rectarum?

I. Si recta est rectis in subiecto plano intersectis perpendicularis in communi sectione, est perpendicularis subiecto plano: & contra. Hæc definitio perpendicularis solidæ lineæ est è 3.d.& 4.p.11. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας. 3.d.11. Huius conuersa est 4.p.11. Ἐὰν εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Quot sunt hic consideranda?

Multa. I. Consectarium. Perpendiculum antea est attributum lineis in superficie. Itaq; inde repetitur consectarium de perpendiculo lineæ cum superficie ipsa.

> Duæ lineæ quarum altera in alteram incidens, æqualiter interiacet, sunt perpendiculares. 10.c.2.uel.10.d.1.
>
> At linea sublimis infinitis lineis in plano intersectis incidens in communi puncto, æqualiter in omnes partes interiacet.
>
> Linea igitur sublimis infinitis lineis in plano intersectis incidens in communi puncto, perpendicularis est ipsi plano.

Aequalem igitur interiacentiam, perpendiculū sublime in rectas omnes subiectas ostendit, nempe ut in omnes partes æqualiter interiaceat. Et singulis intersectis lineis concipimus singula plana cum sublimi communia; ut sublimis & quælibet intersectarū sint in eodē plano perpendiculares, sublimisq; linea plano subiecto ideò sit perpendicularis, quia in eodem puncto est perpēdicularis omnibus rectis quacunq; parte sumptæ fuerint. II. Exemplum quod habes in Ramo. III. Reciprocatio. Nam perpendi-

pendiculum lineæ ad planum ſubiectum eſt è lineis in uno plano. IIII. Linearum numerus, qui hîc nullus certus definitur. Nam ſi de duabus eſt uerum, eſt omnino uerum de infinitis. Quatuor enim anguli recti ſubiectarum cum ſublimi æquabilem ſtatum demonſtrabunt. Intelligatur tamen minimum de duabus ſubiectis in communi puncto perpendiculum. V. Quòd punctum hîc communis ſectio linearum dicitur ab Euclide ad 4. & 5. p. 11. VI. Repræhenſio Euclidis. Nam I. definitionem hîc fecit quę nulla eſt, ſed conſectarium ex 10. d. 11. II. Ex antecedente conſectarij, principium facit & numerat in definitionibus. E conuerſa au[illegible]icit 4. p. 11. Cùm non minus in conuerſa, quam antecedente, materies principij ſit aſſumendi per ſe, non propoſitionis demonſtrabilis. III. Quòd in definitione recta ſublimis dicitur perpendicularis plan[illegible], ſi ſit perpendicularis omnibus rectis. Nam numerus (omnibus) ſenſum turbat: rectis in uniuerſum ſatis eſt, ſiue duæ tantum ſint, ſiue innumerabiles. Poteſt enim uni tantum comparari, ut 6. p. 11. poteſt uerò in eodem ſecũ plano ſitis parallelis infinitis recta perpendicularis eſſe, nec tamen ideò ſolida perpendicularis, nec eidem ſubiecto perpendicularis erit. Itaq; à definitione propoſitio nihil differt niſi linearum numero, quia illic omnibus interſectis in ſubiecto plano, hîc duabus ſublimis perpendicularis efficitur. IIII. Demonſtratio propoſitionis. Demonſtrat enim duos angulos æquales eſſe per triangula quatuordecim. Sed uia iſta ualdè tortuoſa & obliqua eſt, duorum angulorum æqualitatem tot mæandris tamq; præpoſteris exquirere.

II. Si tres rectæ interſectæ, ſunt eidem rectæ perpendiculares in communi ſectione, ſunt in eodem plano. Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν

ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.5.p.11, Consectarium est è perpendiculari & communi sectione. Ex perpendiculo enim & communi sectione intelligitur æqualis in omnes partes status, proptereaq; planicies eadem. Demonstratur impossibili non obscuro, quia pars toti esset æqualis, angulus nempe rectus pars recti. Atq; hæc de perpendiculo sublimi: unde contraria obliquitas intelligitur uel inclinationis in angulo acuto, uel declinationis in obtuso, quæ est 5.& 6.d.11: item similium inclinationum ex æqualibus angulis, quæ est 7.d.11. Parallelismus consequitur: qui tametsi permiscetur cùm solido perpendiculo, consideratur tamen semper in uno plano.

Quæ nam sunt elementa de parallelismo rectarum?

I. Si duæ rectæ sunt perpendiculares subiecto plano sunt parallelæ: & si parallelarum altera est perpendicularis subiecto plano, reliqua est eidem perpendicularis. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. 6.p.11. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 8.p.11.

Quænam est causa antecedentis?

Est è prima lege parallelismi, de qua in prima parte 12.e.5. Nam,

Connexæ recta, & æquantes interiores angulos duobus rectis, sunt parallelæ, per 12.e.5.
At duæ rectæ, eidem subiecto plano perpendiculares: connexæ recta, æquant interiores angulos duobus rectis.
Sunt igitur parallelę.

Quænam est demonstratio Euclidis?

Parallelismus propositus nō demonstratur ab Euclide, sed situs rectarum in eodem plano, qui tamen propositus non erat. Itaq; Lycophron hic est, aliud proponitur, aliud agitur.

Quot sunt consid. in consequente?

Duo: Conuersio & Demonstratio.

Quænam est conuersio?

Octaua est conuersa quædã sextæ, qualis est axiomatis illa conuersio: Si duo sunt eidem æqualia, sunt inter se æqualia: & si æqualium alterum est æquale tertio, reliquum erit æquale eidem.

Quænam est eius demonstratio?

Est è communi perpendiculo. Nam,

In parallelis connexis si alter interior angulus rectus sit, reliquus etiam rectus erit: quia communi perpendiculo diuiduntur.

At duæ perpendiculares sunt parallelæ connexæ.

In his igitur alter angulus cùm sit rectus, reliquus etiam rectus erit: & per consequens, una existente perpendiculari, reliqua erit perpendicularis.

Quænam est Euclidis demonstratio?

Bella illa sextę propositionis demonstratio huc iisdem uestigijs iteratur. Sed elenchus est hic manifestior. Nam definitione parallelarum ęqualitas perpendiculorum intermediorum continetur.

II. Si rectæ in diuersis planis sunt ad eandem rectam parallelæ, sunt inter se parallelæ. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.* 9.p.11. Hæc propositio tã principium est, quàm fuit illud, Quæ eidem æqualia. Neque plani diuersitas magis immutat syllogismũ parallelismi, quàm immutat æqualitatis in illo principio. Postulari igitur potuit: sed uideamus Euclidis demonstrationem: Sunto igitur per 9.e.5. duæ perpendiculares à puncto tertiæ lineæ seu intermediæ duorum planorum. Itaq;

Perpendiculares eidem plano, sunt parallelæ. per 5.e.

At rectæ in diuersis planis ad eandem rectam parallelæ, sunt eidem plano perpēdiculares. Nam tertia seu intermedia linea, cum per 3. e. sit perpendicularis duabus intersectis, est perpendicularis subiecto plano. Itaq; rectæ in diuersis planis sunt perpēdiculares eidem plano.

Rectæ igitur in diuersis planis ad eandem rectā perpendiculares, sunt parallelæ.

III. Si duæ rectæ sint perpēdiculares, primo à sublimi puncto in rectam subiectam, secundo è communi sectione in subiecto plano: tertia à dicto sublimi puncto, perpendicularis secundæ erit perpendicularis subiecto plano. Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου, ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 11.p.11.

Quot sunt hîc consideranda?

Tria: Causa, Demonstratio & Vsus.

Quænam est causa huius elementi?

Consectarium est è 3. e. Nam perpendiculi solidi constitutio constat per causam 4.p.11. ut nempe perpendicularis sublimis sit duabus rectis in plano subiecto contiguis. Id enim satis est, nec aliud Euclides in sua demonstratione complectitur.

Quænam est demonstratio?

A' puncto sublimi sit per 10. e.5. perpendicularis in punctum seu communem sectionem rectæ subiectæ & à communi sectione per 9.e.5. sit altera perpēdicularis: deniq; sublimis recta sit per 10. e.5. perpendicularis in alteram perpendicularem: hæc perpendicularis erit subiecto plano. Nam,

Recta quæ in quatuor partes interiacet æqualiter, est perpendicularis. per 10.e.2.

At recta prima à sublimi pūcto, in quatuor partes interiacet æqualiter: nam neque dextrorsum

ſum neq; leuorſum acclinat: item tertia recta à dicto ſublimi puncto, interiacet æqualiter: quia neq; prorſum, neq; retrorſum pendet.

Recta igitur prima eſt perpẽdicularis rectę ſubiectæ: & tertia eſt perpendicularis ſecundæ: ideoq; perpendicularis ſubiecto plano.

Quid hîc Euclides?

Caſus hîc neſcio quis fortuitus adhibetur ab Euclide uel Theone ut 1.p.4.28.p.6. Res artis aliena & indigna eſt. Fac lineam ut ſors tulerit, ſi perpendicularis eſt ſubiecto plano, habes quod quæris. At (inquam) præcepta artis è logicis legibus generaliter κατὰ παντὸς præcipere debent, nõ temerè, ut hîc Stereometres modò præcipit. Quare logica iſta geometriam, alioqui artium ſeueriſſimam ualdè dedecet.

Quis eſt uſus horum perpendiculorum?

Hæc perpendiculi fabrica nulli extra puluerẽ geometricum uſui uidetur eſſe: & tantùm ſcholaſticorum διαγραμμάτων cauſa fingi.

IIII. Si recta à dato ſubiecti plani puncto ſit parallela rectæ ad idem planum perpendiculari, erit etiam perpendicularis ſubiecto plano. 12.p.11.

DE PLANIS SOLIDIS.

Quodnam eſt perpendiculum planorum?

I. Si recta in altero interſectorum planorum perpendicularis communi ſectioni, eſt perpendicularis ſubiecto plano: plana ſunt perpendicularia: & è contra. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων, τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν. 4. d. 11. Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπὸ τινὸς σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. 38.p.11. Perpendi-

pendiculum planorum è proxima perpendiculi ratione ducitur, planorumq́; inter se æqualis utrinque status est è rectæ in planum perpendiculo, quia hinc intelligitur planum ipsum æqualiter in omnes partes, lineis rectis significatas, interiacere: quod in libro duabus utrinq; paginis aperto percipitur è uersibus paginarum, sectioni & subiecto plano perpendicularibus.

Quot repræhenduntur in definitione Euclidis?

Quatuor: I. Quod ꝓ cōsectario ex definitione rectæ perpendicularis 10. d. 1. fecit definitionem hic, quæ definitio non est, sed, ut dixi, consectarium ex illa 10.d.1. II. Quod ex hac antecedente consectarij principium facit & numerat in definitionibus: è conuersa uerò facit 38. p. 11. III. Communem sectionem planorum sumit pro una linea recta. IIII. Numerus etiam rem obscurat: unica enim recta sufficit, multitudine necessariò non est opus.

Quot reprehenduntur in propositione?

Tria: I. Quòd è conuersa definitionis propositionem fecit. II. Quòd conuersio non rectè facta sit. Antecedentis enim conuersa est: Si intersecta plana sunt perpendicularia, recta in altero perpendicularis communi sectioni, est perpēdicularis reliquo. Sic esset legitima conuersio. At Euclides conuertit præposterè: Si plana sint perpendicularia, recta in altero perpēdicularis reliquo, cadet in communem sectionem. III. Demonstratio, probat enim per impossibile duorum rectorum in triangulo.

II. Si recta est perpendicularis plano, omnia per eam plana, sunt eidem perpendicularia: & si duo plana intersecta, sunt alicui plano perpendicularia, communis sectio est eidem perpendicularis. Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς τὰς ὀρθὰς, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 18.p.11. Ἐὰν δύο ἐπίπε-

δα τέμνοντ-

δύο τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 19. p. 11. Hæc elementa ſeparatim ab Euclide proponuntur & citantur. Prius tamen eſt conſectarium è. 9. e. ſeu 4. d. 11. & quidem diſertius expreſſum, quàm antecedēs illa definitio. Satis enim eſt ad perpendiculum planorum, ut unica recta in altero, perpendicularis cōmuni ſectioni, ſit perpendicularis ſubiecto plano. Itaq; ad rectam perpendicularem demonſtrandum numero & multitudine contiguarum nihil opus eſt. At in perpendiculo planorum unica recta perpendicularis eſſe non poteſt, quin protinus ſint innumerabiles. Poſterius eſt conuerſa proximę, ſi rectę pronūcietur, hoc modo: Si communis interſectio planorum ſublimium eſt perpendicularis ſubiecto plano, interſecta plana ſunt perpendicularia. Patet autem ex eo, quòd communis ipſa ſectio, ſit recta in quolibet interſectorum ſublimium planorum perpendicularis & communi ſectioni & ſubiecto plano. Nam,

Si communis ſectio non eſſet ſubiecto plano perpendicularis: neq; interſecta plana eſſent ſubiecto plano perpendicularia, ſed aliquod eſſet obliquum.
At hoc contra theſim eſt.
Illud igitur neceſſe eſt.

Quinam eſt parallelisſmus planorum?

I. Plana parallela ſunt, quę nuſquam annuunt. παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα. 8. d. 11. Ἀσύμπτωτα ſunt inconcurrentia, id eſt, quæ nuſquā poſſint coincidere. Campanus hîc uerè monet lineas non parallelas non eſſe neceſſariò concurſuras, niſi in eodem plano ſitæ fuerint. Sed intellecta generali definitione linearum parallelarum, quæ ubiq; diſtant æqualiter, ſpecialis iſta definitio uacabit. Conſectaria tamen hinc ſumi poſſunt duo. Parallelismus itaq; planorum

norum è non concursu uerus est, sicut rectarum in eodem plano ad 11.c.5. In parietibus & tabulatis ædium æquidistantibus, parallelismus planorum agnoscitur.

Quódnam est primum corollarium?

Plana parallela sunt, quæ communi perpendiculo diuiduntur. πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. 14.p.11. Consectarium est è 3. & 6.c. Nam,

Quæ plana habent mediam rectam perpendicularem utriq; plano: ideoq; rectis utrinque intersectis in communi sectione perpendicularem, & rectos utrinq; interiores angulos: illæ communi perpendiculo diuiduntur.

At plana parallela, habent mediam rectam perpendicularem utrique plano, ideoque rectis utrinq; intersectis perpēdicularem: & rectos utrinq; angulos.

Plana igitur parallela communi perpendiculo diuiduntur.

Est item è definitione ipsa parallelismi ad 11. c.2. Apertè enim indicat definitionem generalem parallelarum, quia lineæ parallelæ sunt, quæ distant communi perpendiculo.

Quódnam est secundum?

Plana parallela sunt, si binæ rectæ in planis parallelis conterminæ sunt parallelæ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι: παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. 15.p.11. Tales sunt oppositi parietes in fastigio ædium. Thesim autem continet decimæ propositionis hæc propositio & eius antecedens est causa consequentis ex illa generali parallelarum lege. 6.c. 12.c.5. Nam,

Lineæ rectæ quæ connectunt æquales & parallelas, sunt æquales & parallelæ.

At

At hîc utrinq; lineæ rectæ connectunt æquales & parallelas.

Lineæ igitur utrinque sunt æquales & parallelæ & sic parallelismum & æquidistantiam indicant.

Idem uerò fuerit si conterminas cogites infinitè extendi. Nam plana quoque extensa, erunt infinitè parallela.

II. Si duo plana parallela secantur plano, communes sectiones sunt parallelæ. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. 16. p. 11. Facilem probationem habet in Theone:

Si sectiones non essent parallelæ, neq; plana ipsa essent parallela: sed & ipsæ sectiones & plana in quibus sunt concurrerent.

At non hoc, quia id contra thesim est.

Illud ergo necesse.

LIB. XXII. De Pyramide.

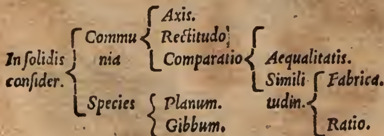
Hactenus Stereometria rectarum & planorum: sequitur stereometria ipsorum solidorum.

Quot sunt consid. in Solidis?

Duo: Communia & Species.

Quot sunt communia?

Tria: Axis, Rectitudo & Comparatio.



Quid est axis solidi?

Est diameter circa quam conuertitur solidum ipsum. è. 15. 19. 22. d. 11. Axis uulgò putatur proprius esse sphæræ, qui definitur 15. d. 11. uerũ etiam ab Euclide attribuitur cono, 19. d. 11. & cylindro. 22. d. 11. & solido plano & ordinatis tetraëdro, hexaëdro, octaëdro, icosaëdro, dodecaëdro & conuersionis motus nominatim exprimitur, ut hic motus geometricus intelligatur & sic axis in conoidibus & sphęroidibus dicitur. Pro diametro ubiq; Euclides ait, ἡ μένουσα εὐθεῖα, quiescẽs linea ἄξων ἐστὶ ἡ μένουσα εὐθεῖα, περὶ ἣν στρέφεται τὸ ἡμικύκλιον, τὸ τρίγωνον, τὸ παραλληλόγραμμον, in sphæra, cono, cylindro fabricando. At fabricati iam corporis & constituti motus hìc geometricus quisnam erit, aut quid ad geometram?

Quid est solidum rectum?

Cuius axis est perpendicularis centro basis. Sic conus, sic cylindrus rectus Apollonio & Sereno definiuntur, & hos solos Euclides considerauit: imò solidum nullum nisi rectum geodæsia suscipit.

Quæ nam solida sunt æqualia?

Si solida compræhenduntur à superficiebus homogeneis æqualibus multitudine & magnitudine, sunt æqualia. ἴσα καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. 10. d. 11. Hic duo consid. sunt. Consectarium & Elenchus Euclidis. Nam hæc definitio consectarium est ex illa generali æqualitatis intelligentia, seu ἐφαρμόσεως axiomate, Quæ eidem æqualia, inter se sunt æqualia. Superuacaneum igitur fuit figuras solidas æquales definire.

Quottuplex est elenchus Euclidis hic?

Duplex: I. Quia definitio est angustior definito. Itaq;,

Definitio angustior definito, est uitiosa.

At hæc definitio est angustior definito. Definitum

tum enim est generale, nempe figura solida: definitio autem est figuræ solidæ planæ. Neq; enim sphæra, conus, cylindrus planis compræhenduntur. Itaque pluribus conuenit definitum.

Vitiosa igitur hæc definitio est.

II. Inanis tautologia: repetit enim definitionem similium figurarum, de qua 9.d.11. Sed definitio æqualium prior est. Sic duo cubi sunt æquales, quorum senæ superficies planæ sunt æquales: duæ sphęræ sunt æquales, quarum superficies sunt æquales: duo coni cylindriq; sunt æquales, quorum superficies superficiebus, bases basibus sunt æquales. Neque tamen hinc dixeris isoperimetra solida quælibet esse æqualia: fallere enim possit in heterogeneis.

Quæ nam solida sunt similia?

Si solida compræhenduntur à superficiebus multitudine æqualibus & similibus, sunt similià. ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος. 9.d.11. Hic item duo sunt consid. Consectarium & Elenchus. Consectarium enim est è generali definitione similium figurarum ad 14.e.4. Nam,

> Figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus æqualium angulorum, sunt similes. 14.e.4.
>
> At plana solida sunt figuræ æquiangulæ & proportionales cruribus ęqualium angulorum. Nam in his anguli æquantur ex similitudine planorum similium, & crura æqualia sunt ipsæ planæ superficies, & ideò proportionales, æquales & similes.
>
> Plana igitur solida sunt similia.

Quis est Elenchus?

Elenchus prioris definitionis rursus in ista definitione offenditur. Promittitur genus, præstatur species.

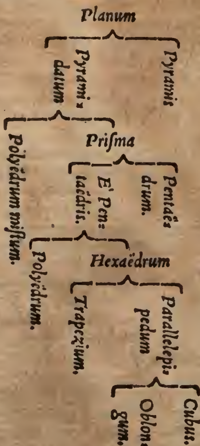
Quæ nam

Quænam est ratio solidorum similium?

Solida similia habent triplicatã rationẽ homologorũ laterũ, & duo media proportionalia. τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 33.p.11. αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 8.p.12. Consectarium est 15.c.4.

Quottuplex est solidum?

Duplex: Planum, & Gibbum.



Quid

Quid est planum corpus?

Quod compræhẽditur à superficiebus planis. Planum corpus distinguitur à numero planorum, quæ ἕδραι sunt, unde tetraëdrum, pentaëdrum, hexaëdrũ. Basis etiam pro hedra dicitur. Terminorum seu hedrarum series perpetua est in pyramide à quaternario, in pyramidato à quinario. Numerus angulorum, numero terminorum non perpetuò respondet: Pyramis tetraëdra, pentaëdra, polyëdra, est quidẽm quadrangula, quinquãgula, multangula: sed prisma pentaëdrum est sexangulum, hexaëdrum octangulum & sic deinceps.

Quot sunt consid. in plano corpore?

Duo: Anguli & Species.

Quot sunt elementa de angulis in solido?

Duo: I. Anguli plani compræhendentes angulũ solidum, sunt minores quatuor rectis: ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. 21. p. 11.

Quot sunt in hac propositione consideranda?

Tria: Elenchus, Demonstratio & Vsus.

Quis est Elenchus?

Est elenchus generis pro specie. Proponit enim generaliter quod specialiter intelligatur de angulo solido plano, quod ostendit comparatio cum quatuor angulis rectis.

Quæ nam est demonstratio?

Est non obscura è subductis reliquis angulis triangulorum planorum solidum componẽtium. Nam,

Si anguli plani cõpræhendẽtes angulũ, æquarentur quatuor rectis: complerent locum planum, per 4. c. 10. e. 6. neq; omnino angulum facerent, multoq; minus si maiores.

At non complent locum planum.

Non igitur æquantur 4 rectis.

Quis

Quis est eius usus?

Ad probandum quinq; esse duntaxat corpora ordinata ad finem 13 libri.

II. Si tres anguli plani minores quatuor rectis, cōpræhendant angulum solidum: duo quilibet sunt maiores reliquo: & è contra. Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. 20. p. 11. ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι. 23. p. 11. Hic duo sunt cōsideranda, Antecedens & Conuersa. In antecedente Analogia & Causa.

Quæ nam est analogia?

Est ad 7. e. 6. uel 20. p. 1. de triangulis.

Quæ nam est causa?

In promptu est. Nam,

Si duo plani anguli essent æquales reliquo, nullum spacium medium cum reliquo concluderent: sed sua congruentia planum unum è duobus facerent: multò uerò minus, si minores.

At non hoc.

Ergo nec illud.

Quot sunt consid. in Conuersa?

Tria: Analogia, Demonstratio & Elenchus.

Quænam est Analogia?

Respondet 22. p. 1.

Quæ nam est Demonstratio?

Logicam continet in demonstratione prorsus admirabilem hæc conuersa, propter ineptissimas nugas quinq; partium, quòd radius siue sit intra latera, siue in latere, siue extra, neq; æqualis neq; maior esse possit. Huc etiam sex & uiginti syllogismi ex totidem propositionibus intexuntur: & hoc uidelicet Theoni uel Euclidi est demonstrare, rem per se mani

festam

festam tot nebulis inuoluere & obscurare. Etenim propositio ista 23 est conuersa 20 & 21. Vtq; antecedens per se manifestum est, ita conuersa quoq;. Sed Euclides ita demonstrat. Primò si anguli tres sunt æquales, duo protinus intelliguntur maiores esse reliquo. Sin anguli sint inæquales, sit angulus a e i maior angulo a e o & æqualis amputetur a e u & æquetur e u ipsi e o. Iam per 2.e.7. duo triangula a e u & a e o æquantur basibus a u & a o. Item a o & o i maiora quàm a i, & a o æquatur ipsi a u. Ergo o i maius est ipso i u. Hic duo triangula u e i & i e o duobus cruribus æqua, & basis o i maior basi i u. Ergo per 4. e.7. angulus o e i maior est angulo i e u. Ergo duo a e o & o e i sunt maiores quàm ipse a e i.

Quis est Elenchus?

Est generis. Nec enim hæc anguli constitutio generalis est: nec enim potest è planis angulis sphæricus aut mistus fieri. Itaq; pollicetur hic Euclides genus, præstat speciem.

Quot sunt species solidi plani?

Solidum planum est pyramis aut pyramidatum.

Quid est Pyramis?

Est solidum planum à basi rectilinea (siue triangula, siue quadrangula) æqualiter fastigiatum.

Quot sunt in Pyramide consideranda?

Duo: Consectaria 4 & Species ordinata.

Quænam sunt Consectaria?

Sunt de hedris, primatu & comparatione.

I. Pyramidis hedræ sunt una plures angulis in basi. Est autem hedra plana solidi superficies, qua terminatur.

II. Pyramis est prima figura solidarum. Est enim pyramis in solidis, quod triangulum in planis. Resolui .n. pyramis potest in solidas figuras alias, sed in nullam simpliciorē potest & paucioribus hedris constantem.

III. Py-

III. Pyramides æquealtæ sunt ut bases. *αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἢ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις*. 5. & 6. p. 12. Hę duæ propositiones speciales sunt ad primas figuras.

IIII. Reciprocæ basi & altitudine sunt æquales *τῶν ἴσων πυραμίδων, καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι*. 9. p. 12. Elenchum habet hæc propositio de pyramidibus triangulis, cum tamen res sit omnium pyramidum communis: imò consectarium è genere illo, primarum æqualium bases & altitudines esse reciprocas. Itaq; demonstratio hîc uacabit: neq; præcipuum quicquam stereometriæ hîc est, commune totum est planorum & solidorum: Duo enim hæc posteriora consectaria sunt è 12. & 13. e. 4.

Quæ nam species ordinata pyramidis est?

Vnica est, Tetraëdrum. Est autem tetraëdrum pyramis ordinata à quatuor triangulis comprehensa. *τετράεδρόν ἐστι σχῆμα ὑπὸ τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον*. 26. d. 11. quæ prætermittit proximũ genus pyramis, quo nomine 13. p. 13. & in scholio 13. libri appellatur. Deinde nimis generalis est. Multa enim corpora è planis æquilateris & æquiangulis, sed neq; æqualibus inter se neque similibus, esse possunt. Addenda ergo est ordine differentia. Hinc pertinent Archimedis 13 corpora apud Pappum lib. 5. de quibus uide scholas hîc.

Quid vocas ordinatam pyramidem?

Quæ cõprehenditur à triangulis non solũ ordinatis sigillatim, sed æqualibus inter se similibusq;.

Sed nónne tetraëdri nomen est generale?

Est quidem, sed tetraëdrum generali nomine species ista dicitur propter excellentiam, quomodo etiam pyramis appellatur.

Quot

Quot sunt in Tetraëdro consideranda?

Duo. Consectaria 3 & Comprehensio seu Inscriptio.

Quæ nam sunt Consectaria?

I. Tetraëdri latera sunt sex, anguli plani duodecim, solidi quatuor. Nam,

Quatuor triangula, habent 12 angulos: quia quater tria sunt 12.

At tetraëdrum comprehenditur à quatuor triangulis ternorum laterum atq; angulorum.

Tetraëdrum ergo habet 12 angulos.

Cur tantùm sunt sex latera?

Tetraëdrum constat è quatuor triangulis ternorum laterum: itaq; habet ea ratione duodecim latera: sed unumquodq; latus bis assumitur, ideoq; numerus est dimidio minor. De qua re Isidorus in scholio lib 15. elementorum Euclidis: ad quod scholion uide scholas Rami.

II. Tetraëdra duodecim complent solidum locum. Nam,

Octo solidi anguli complent solidum locum.

At duodecim anguli tetraëdri faciūt aut æquant octo solidos: cū utriq; 24 rectis planis comprehendantur. Nam angulus rectus

Solidus comprehenditur à tribus planis rectis: ergo 8 comprehenduntur à 24.

Tetraëdri comprehenditur à tribus planis æquilateris, id est à tertijs unius recti: ideoq; à duob. rectis $\frac{6}{3}$ (2. Itaq; 12 comprehenduntur à 24.

Duodecim igitur anguli tetraëdri complent solidum locum.

Sic Potamon geometra (ut est apud Simplicium lib.

8.cap.3. de cœlo) demonstrauerat ex angulis compleri locum solidum à 12 pyramidibus.

III. Si quatuor triangula ordinata & æqualia solidis angulis componantur, cōpræhendent tetraëdrum. Hæc fabrica promptior est, quàm sequens: præsertim si triangulum in 4 triangula tribus lineis per tria latera bisecta diuidas.

Quæ nam est comprehensio seu inscriptio tetraëdri?

Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.13.p.13. Hæc propositio tres partes habet: & hoc uult. Si recta potens sesquialterum ad latus trianguli æquilateri secetur dupla ratione, duplum segmentum perpendiculare trianguli centro connexum cum eius angulis comprehendet tetraëdrum.

Quot sunt hic consideranda?

Quatuor, Compræhensio, Exemplū seu diagramma, Demonstratio & Elenchus Euclidis.

Quid est comprehendi solidum?

Compræhendi solidum à rectis est per plana rectis compræhensa, ut deinceps.

Quod nam est diagramma?

Quatuor hic requiruntur

- *I. Recta potens sesquialterum ad latus trianguli æquilateri per 6.e.12.*
- *II. Sectio rectæ dupla ratione per 1.6. 13.e.7.*
- *III. Duplum segmentū perpendiculare æquilatero triangulo ad centrū per 7.e.21.*
- *IIII. Connexio dupli segmenti cum trianguli angulis.*

Quæ nam est demonstratio?

Vbi latera omnia æqualia sunt, ibi ipsa triangula sunt

la sunt æquilatera & æqualia.

At hîc latera omnia sunt æqualia. Acquātur enim

- *1. Tria*
  - *Humilia, ex thesi, quia ibi requiritur triangulum æquilaterum.*
  - *Sublimia per 5.e.12.*
- *2. E sublimibus quodlibet humili. Nam*
  - *Quæ possunt triplum radij, sunt æqualia.*
  - *At latus tum trianguli, tum sublime possunt triplum radij, quod prosyllogismo duplici probatur.*
  - *Latus igitur trianguli & sublime quodlibet sunt æquali.*

Hîc igitur triangula sunt æquilatera & æqualia.

Qui nam prior prosyllogismus est?

Est de latere trianguli humilis. Nam si triangulo circulus circumscriptus intelligatur, latus poterit triplum radij per 7.e.18.

Qui nam est alter?

Est de latere sublimi, quod potest item triplum radij. Nam,

1. Vt duplum segmentum est ad radium, sic radius ad subduplum segmentum. Nam per 1.c.4.e.8. radius est perpendicularis pro-

portionalis intersegmenta basis.

2. Vt prima recta seu duplum segmentum est ad tertiam seu subduplum segmentum: sic quadratum primæ rectæ, est ad quadratum radij. Nam per 1. e. 15. e. 4. Si lineæ rectæ sint continuè proportionales una plures dimensionibus figurarum similium ad primam secundamque similiter sitarum, ut prima recta est ad ultimam, sic prima figura est ad secundam.

3. Componendo primam rectam cum secunda recta: Vt tota recta, est ad secundam rectam, sic quadrata primæ rectæ & radij, id est, per 5.e.12. quadratum lateris subtendentis angulum est ad quadratum radij.

At tota recta est tripla ad secundam rectam.

Ergo quadratum lateris subtendentis angulum est triplum ad quadratum radij.

Quare latus sublime in secunda figura æquale lateri trianguli in prima figura, potest triplnm radij, lateraque ideò omnia æqualia, proindeque & ipsa triangula.

Quis est Euclidis Elenchus?

Quia in ratione diametri sphæricæ ad latus tetraëdri, adhibet propositionem geometricam, quæ præcedere in geometria debuerat, & ad omnes res (quibus seruire poterat) accommodari, quam ideò habemus superius.6.e.12.

LIBER XXIII.

De Prismate.

Quid est Pyramidatum?

Est solidum planum à pyramidibus compræhensum.

Quot

Quot sunt eius species?

Duæ. Prisma & Polyedrum mistum.

Quid est prisma?

Est pyramidatum, cuius duo opposita(in basi)plana sunt æqualis, similia, parallela:reliqua parallelogramma. πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. 13.d.11.

Vnde dicitur Prisma?

Prisma est Campano corpus serratile, secuto nempe quandam originem nominis: πρίω enim est seco, distringo, & πρισμὸς est coarctatio, compressio.

Quot sunt eius bases?

Pyramidis unica basis fuit, prismatis duæ sunt bases oppositæ, primò æquales, tum similes, deinde parallelæ reliquæ sunt parallelogrammæ.

Quot sunt eius hedræ?

Hedræ prismatis sunt binario plures angulis in basi. Vt uerò pyramidis à quaternario hedrarum, sic prismatis à quinario hedrarum in infinitum accretio est, ut sit à basi triangula, quadrangula, quinquangula, pentaëdrum, hexaëdrum, heptaëdrum & sic in infinitum. Sic Campanus prisma pressius definit, quàm Euclides & quinque planis tantùm comprehendit. Euclidis autem definitio generalis est, prismaque facit è quauis basi, triangula, quadrangula, multangula, ut sit pyramis. Errat autem Campanus etiam in eo quòd ex infinita prismatum multitudine unicum esse arbitratur: qui error ex Euclide natus uidetur qui prisma specialiter usurpat pro pentaëdro ad 40. p. 11. ad 3 & 4. p. 12. ut rectangulum in planis pro oblongo, & pyramidem in solidis pro tetraëdro ordinato.

Quot sunt consideranda in prismate?

Duo. I. Communia in geodæsia & comparatione. II. Species.

Quae nam est Geodæsia prismatis?

Planus è basi & altitudine est soliditas recti prismatis. Geodæsia nempe parallelogrammi rectanguli (de qua suprà lib. 11.) est hic communis: cùm altitudinis plana sunt rectangula parallelogramma, sed res per species intelligetur.

Quae nam est comparatio?

Est cum pyramide. Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine æqualis. πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 7.p.12.

Quot sunt hîc consideranda?

Quatuor. Vsus, Corollarium, Demonstratio & Consectaria 4.

Quis est vsus huius elementi?

Ad pyramidum mensuram.

Quod nam est Corollarium?

Omnis pyramis est tertia pars prismatis æqualem basim & altitudinem habentis.

Quomodo id demonstratur?

Exemplo dissecti prismatis & digito melius demonstratur quàm ullo argumento: ubi uideas in prismate pentaëdro tres pyramides æquales, duas extremas similes, tertiam ualdè tota figuræ specie dissimilem: in cubo similiter. At in parallelepipedo oblongo, in rhombo, rhomboide, dissimilitudo maior apparebit.

I. *Quod nam est primum consectarium?*

Planus è sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine æqualis.

Quomodo habetur altitudo pyramidis?

Si quadratum è radio basis, tollatur è quadrato lateris. Latus enim reliqui per 5.e.12. erit altitudo.

Quo

Quot sunt hîc exempla?

Tria. Nam pyramis est aut
- *Integra à basi*
  - *Triangula.*
  - *Quadrata.*
- *Curta à basi sexangula.*

I. Est in pyramide à basi triangula. Sit triangulum cuius latus quodlibet sit 12. Hîc secundum 9.e. 12. latus continuè facti 3888, est 62 $\frac{44}{124}$ quæ est area trianguli & basis pyramidis. Altitudo est 9 $\frac{15}{19}$ quia per 7.e.18.latus potest triplum radij.(Multiplica 12 in se, factus erit 144, quem diuide per 3, quotus erit 48: qui subductus à 144, relinquit 96.) At si de 144 quadrato 12 lateris tollatur subtriplum, id est, 48, reliquum 96 per 5. e. 12. erit altitudinis quadratum, quadratique latus erit 9 $\frac{15}{19}$. Tertia autem pars 3 $\frac{5}{19}$ ex qua & basi planus erit 203 $\frac{1103}{2375}$.

II. Est in pyramide à basi quadrata. Quadratum 36 tollatur à quadrato 292 $\frac{9}{1156}$ lateris 17 $\frac{3}{34}$ (Multiplica 17 per se factus est 289. Item 3 per se, factus est 9: & 34 per se, factus est 1156.) Reliqui 256 $\frac{9}{1156}$ latus erit 16 $\frac{3}{34}$ pro altitudine: cuius tertia 5 $\frac{30}{102}$ ex qua & basi 72 $\frac{1}{4}$ erit 387 $\frac{11}{24}$.

III. Est in pyramide curta à basi sexãgula. Metire totã & partẽ q̃ deest: tũ à tota detrahe quod defuerat. Sit latus totius 16 $\frac{5}{32}$ latus particularis 8 $\frac{1}{16}$ erit perpẽdicularis totius 15 $\frac{5}{32}$. tertia pars $\frac{5}{96}$ ex qua & basi 93 $\frac{3}{11}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in minore pyramide à quadrato lateris 65 $\frac{1}{256}$ sublato quadrato radij 9. reliqui 56 $\frac{1}{256}$ latus ferè 7 $\frac{1}{2}$ pro altitudine, cuius tertia pars fuit 2 $\frac{1}{2}$; basis ferè 22, ex

qua & tertia illa parte planus est 55 pro soliditate minoris pyramidis, qua deducta de maiore, reliquum 416 erit pro curta pyramide.

II. Quod'nam est secundum consectarium?

Prismata homogenea æquealta sunt ut bases. 29. 30, 31. 32. p. 11.

Quot sunt hîc consideranda?

Duo. Demonstratio & Elenchus Euclidis.

Quæ'nam est demonstratio?

Est è 12. e. 4. ex quo hoc consectarium speciale deducitur. Nam,

Figuræ primæ æquealtæ sunt ut bases. 12. e. 4.
At prismata sunt multiplicia primarum, nempe pyramidum.
Prismata igitur æquealta sunt ut bases.

Sic longè præstantissima & nobilissima demonstratio una illa è geminis causis planè perfecteque satisfacit, quarum altera per altitudinem data, solum discrimen superest ex altera, id est, basi. Homogenea autem prismata requiruntur, quia pentaëdrum cum hexaëdro non ita conueniret.

Quottuplex est elenchus Euclidis?

Duplex. Nam in 4 propositionibus. 29. 30. 31. 32. p. 11. primò parallelepipedo tribuit, quod est prismatis cōmune. Deinde ipsæ propositiones ualdè prepostero ordine positæ sunt. Nam 32 est maximè omniū generalis & cæteras antecedētes speciales cōplexa: τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. Tum 31 simili ratione complectitur 29 & 30. τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 31. τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν

αἱ ἐφε-

μὴ ἐφεσῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 29. τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, & ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 30. Omninoq; si 32 præcessisset, consequerentur tres reliquæ: item si præcessisset 31, concluderentur ex ea duæ 29 & 30. In 29 & 30 rectas insistentes, esse & non esse in ijsdem rectis, est superiorum planorum duo quælibet latera in unam rectam continuari aut non continuari, uel solida ipsa sub eandem rectam uel non eandem constitui.

III. *Quod'nam est tertium consectarium?*

Si prismata reciprocãtur basi & altitudine, sunt æqualia. τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι: & ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 34.p. 11. Consectarium est è 13.e.4. Deducta enim est propositio illa è primarum figurarum proprietate, ubi causæ efficientes illæ solæ sunt basis & altitudo. Itaq;,

Figuræ primæ reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales. 13.e.4.

At prismata sunt æquemultiplicia primarum.

Prismata igitur basi & altitudine reciproca, sunt æqualia.

IIII. *Quod'nam est quartum?*

Si prisma secatur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt ut bases. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. 25.p.11. Deducitur etiam è lege primarum figurarum: & duæ efficientes causæ solæ comparantur: altitudo & latitudo. Itaque cùm altitudo sit eadem, solum discrimen est è basis latitudine. Itaq;,

Prismata homogenea æquealta, sunt ut bases. 2.c. 5.

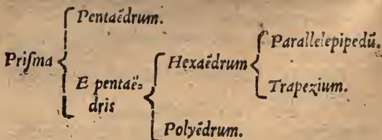
At ſegmenta priſmatis, ſecti plano oppoſitis hedris parallelo, ſunt priſmata homogenea æquealta.

Segmenta igitur priſmatis, ſunt ut baſes.

Campanus hîc docet hanc propoſitionem conuenire ſerratilibus illis ſuis, i. priſmatis pentaëdris, putatque omnia quæ Euclides ſolis parallelepipedis duodecim propoſitionibus undecimi attribuit, priſmatis pentaëdris conuenire, quia ſunt dimidia parallelepipedorum. Sed Campanus hîc non ſatis uidit. Omnibus enim priſmatis nõn ſolùm ſerratilibus & pentaëdris conuenit quod proponitur. Atque hactenus communia priſmatum: ſequuntur eorum ſpecies.

Quottuplex eſt Priſma?

Duplex. Aut enim pentaëdrum eſt, aut è pentaëdris compoſitum. Solutio ſeu analyſis, compoſitionem ſeu geneſin oſtendet.



Quod'nam eſt elementum de pentaëdris?

Si pentaëdra alterum baſis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulum duplæ ſunt æquealta, ſunt æqualia. Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. 40. p. 11.

Quot sunt hic consideranda?

Quatuor. Causa æqualitatis, Demonstratio, Elenchus Euclidis & Geodæsia pentaedri.

Quæ nam est causa æqualitatis?

Causa breuis est, quia dimidia sunt eiusdem prismatis. Itaque,

Dimidia eiusdem sunt æqualia.

At duo pentaëdra alterum basis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulum duplæ, sunt dimidia eiusdem prismatis.

Sunt igitur æqualia. Quod prismate per diagonios oppositorum laterum bisecto intelliges.

Quæ nam est demonstratio Euclidis?

Primò sunto pentaëdra duo æquealta, primum basis triangulæ, secundum parallelogrammæ, duplæ ad triangulam. Secundò utrumque duplicetur & absoluatur: ut fiant parallelogramma duo. Tertiò ex thesi, basis parallelogrãma secundi pentaëdri, dupla est basis triangulę primi pentaëdri, ad quã tanquam dimidiam dupla est tota basis totius parallelogrammi per 4.c.6.c. 10 Itaque bases primi parallelogrammi & secundi sunt æquales, ideoq;,

Prismata homogenea æquealta, sunt ut bases. 32.p.11.2.c,5.c.

At hic sunt prismata duo homogenea æquealta ex thesi.

Hic igitur bases sunt æquales. Iam ex hac conclusione,

Si bases sunt æquales, prismata erunt æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia.

At illud.

Ergo & hoc.

Quottuplex est Elenchus Euclidis?

Duplex. Ordinis & Speciei. Nam primò præponi debuit. 32.p.11. quia de æqualitate præcipit. Secundò non

dò non ſatis accuratè propoſuit. Debuit enim addere priſmata pentaëdra : his enim ſolis id poteſt conuenire. Quomodo enim loquitur falſa eſt:ut ſi ſumas priſmata parallelepipeda hexaëdrâ eiuſdẽ & baſis & altitudinis, erunt æqualia per 32.p.11. At ſi alternis dimidium cum altero integro compares,erunt æquealta : alteriusque baſis triangula,alterius parallelogramma dupla triangulæ, neque tamen erunt æqualia. Quare falſa eſt hæc propoſitio niſi ſpecialiter intelligatur : tribuit enim generi quod eſt ſpeciale.

Quænam eſt Geodæſia pentaëdri?

Priſmatis pentaëdri geodæſia iam dicta eſt generaliter: res è duobus ſubiectis pentaëdris(uno baſis parallelogrammæ,alterum triangulæ) intelligatur. Sit igitur primò priſma pentaëdrũ, cuius altitudo ſit 12, baſis triangulæ latus ſit 6. Iam planus ex 12 altitudine & 18 perimetro baſis triangulæ (nam ter 6 ſunt 18) eſt 216: area uerò baſis triangulæ ſecundum 9.e.12.eſt 15 $\frac{1}{3}$ $\frac{8}{1}$ (id eſt ferè $\frac{3}{5}$) Hæc bis aſſumpto, id eſt, 31 $\frac{1}{5}$ & cum plano 216 addita, componit 247 $\frac{1}{5}$ ſummam totius ſuperficiei. At planus ex eadem baſi 15 $\frac{3}{5}$ & altitudine 12 eſt 187 $\frac{1}{5}$ pro tota ſoliditate. Deinde ſit ſecundum priſma pentaëdrum baſis triangulæ (qui cuneus ex acumine dicitur,& qui propriè à ſecando priſma diceretur) cuius altitudo ſit 3, baſis triangula, ex tribus lateribus, 5, 12, 13. Iam planus ex 3 altitudine & 30 perimetro baſis triangulæ, eſt 90:area uerò baſis triangulæ ſecundum 9.e.12.eſt 30: hæc bis aſſumpta.i.60. & cum plano 90 addita, componit 150 ſummam totius ſuperficiei. At planus ex eadem baſi 30 & altitudine 3, eſt 90 pro tota ſoliditate.

Quid eſt Parallelepipedum?

Cuius oppoſita plana ſunt parallelogramma. Ἐὰν

στερεὸν

στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι. 24. p.11. Itaque parallelepipedum in solidis respondet parallelogrammo in planis, id est, quadrato, oblongo, rhombo, rhomboidi. Hic enim hedræ oppositæ sunt parallelæ, illic opposita latera sunt parallela.

Quot sunt hîc consideranda?

Quinque: Captio Euclidis, Causa captionis, Consectaria, Communia, & Species.

Quæ nam est captio?

De certo genere plani præcipit, sed ualdè incerta oratione. Itaque Campanus hîc obstrepens nescio cui, ait ista propositione solidum parallelis planis compræhensum tantũ esse parilaterum quidem à senario terminorum numero deinceps infinitum, neque tamen pariterminũ quodlibet hîc intelligi posse, sed parallelogrammum duntaxat, cùm omnes termini sunt parallelogrammi, ideoq; duntaxat sexaëdrum. Quod si uerum est, parallelepipedum respõdet in planis parallelogrammo.i.quadrato, oblongo, rhombo, rhomboidi. Itaque propositio ista uera tantùm esset de prismate, non de misto polyedro. Nec enim octaëdrum, icosaëdrum, dodecaëdrum (quamuis compræhensa è planis parallelis) habent oppositos terminos parallelogrammos: habent enim triangulos octaëdrum & icosaëdrum: dodecaëdrum autem habet quinquangulos.

Quæ nam est causa captionis?

Omissa partitio & definitio. Nam,

Si partitus esset Euclides genera solidi plani, si hoc ipsum parallelepipedum definisset, tota confusio esset sublata.

At genera plani non est partitus: & parallelepipedum non definiuit: sed ut in 33.& 34. p.1. definitio parallelogrammi, ita hic prismatis paral-

parallelogrãmi definitio in propositionem sophisticè est conuersa.

Confusio igitur manet.

Quot sunt Consectaria?

Duo. I. Parallelepipedum bisecatur per diagonios oppositorum laterum. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 28. p. 11. Hic duo sunt consideranda: Elenchus & Demonstratio. Nam primò ista propositio materiam principij ac definitionis habet. Ducitur enim è definitione parallelogrammi ad 34. p. 1. Vnde admonemur aliquid esse commune planorum & solidorum, i. figuræ parallelogrammæ proprium: imò esse omninò in omni magnitudine bisectionem aliquam, seu punctum, seu lineam, seu superficiem, quæ magnitudo bifariam secatur: id in figura plana diameter & diagonius (si est per angulos oppositos) dicitur, in solida nomine caret. Itaque nomine generali esset opus ad hanc generalem affectionem declarandum. Deinde quod ad demonstrationem attinet, esto prisma hexaedrum è basi quadrangula & bisecetur per diagonios oppositorum laterum, duo prismata secta erunt æqualia. Nam,

Comprehensa à basibus æqualibus multitudine & magnitudine, sunt æqualia.

At duo prismata parallelepipedi per diagonios bisecti, comprehenduntur à basibus æqualibus. Nam diagonij bisecant oppositas bases per 2. c. 6. e. 10. & reliquæ bases oppositæ duorum prismatum dissectorum per 3. e. æquantur.

Duo igitur prismata talia sunt æqualia.

II. Si parallelepipedum bisecatur duobus planis bisecantibus opposita latera, communis bisectio & dia-

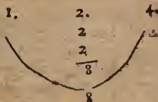
& diagonius, inter se bisecantur. Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. 39. p. 11. Potest esse omnis prismatis, dummodò diagonius generaliter in omni figura intelligatur, id nempe quo bisecatur figura: talis enim est in omni figura bisectio. Atque hoc quicquid est, demonstrabile omninò non fuit, nisi fortè & demonstrabile uideatur eiusdē figuræ parallelogrammæ diametros inter se bisecari: nihil enim aliud ista propositio loquitur. Itaque,

Diametri inter se bisecantur.
At in parallepipedo duob. planis bisecto, communis bisectio & diagonius sunt diametri.
Communis igitur sectio & diagonius inter se bisecantur.

Quæ nam sunt communia?

I. Si tres rectæ sunt proportionales, parallelepipedū mediæ æquatur æquiangulo parallelepipedo omnium. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. 36. p. 11. Hæc propositio proponit generaliter de omni parallelepipedo æquiangulo, quod poterat similiter de quouis parallelogrammo æquiangulo. 16. & 17. p. 6. (unde hæc deriuantur) proponere. Sic semel bina quater sunt octo, & bis bina bis sunt eidem octo.

1. 2. 4. (8
2. 2: 2. (8



Sic bis

portionalis interſegmenta baſis.

2. Vt prima recta ſeu duplum ſegmentum eſt ad tertiam ſeu ſubduplum ſegmentum: ſic quadratum primæ rectæ, eſt ad quadratum radij. Nam per 1. c. 15. & 4. Si lineæ rectæ ſint continuè proportionales una plures dimenſionibus figurarum ſimilium ad primam ſecundamque ſimiliter ſitarum, ut prima recta eſt ad ultimam, ſic prima figura eſt ad ſecundam.

3. Componendo primam rectam cum ſecunda recta: Vt tota recta, eſt ad ſecundam rectam, ſic quadrata primæ rectæ & radij, id eſt, per 5. e. 12. quadratum lateris ſubtendentis angulum eſt ad quadratum radij.

At tota recta eſt tripla ad ſecundam rectam.

Ergo quadratum lateris ſubtendentis angugulum eſt triplum ad quadratum radij.

Quare latus ſublime in ſecunda figura æquale lateri trianguli in prima figura, poteſt triplnm radij, lateraque ideò omnia æqualia, proindeque & ipſa triangula.

Quis eſt Euclidis Elenchus?

Quia in ratione diametri ſphæricæ ad latus tetraëdri, adhibet propoſitionem geometricam, quæ præcedere in geometria debuerat, & ad omnes res (quibus ſeruire poterat) accommodari, quam ideò habemus ſuperius. 6. e. 12.

LIBER XXIII.

De Priſmate.

Quid eſt Pyramidatum?

Eſt ſolidum planum à pyramidibus compræhenſum.

Quot

Quot sunt eius species?

Duæ. Prisma & Polyedrum mistum.

Quid est prisma?

Est pyramidatum, cuius duo opposita (in basi) plana sunt æqualis, similia, parallela: reliqua parallelogramma. πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα. 13. d. 11.

Vnde dicitur Prisma?

Prisma est Campano corpus serratile, secuto nempe quandam originem nominis: πρίω enim est seco, distringo, & πρισμὸς est coarctatio, compressio.

Quot sunt eius bases?

Pyramidis unica basis fuit, prismatis duæ sunt bases oppositæ, primò æquales, tum similes, deinde parallelæ reliquæ sunt parallelogrammæ.

Quot sunt eius hedræ?

Hedræ prismatis sunt binario plures angulis in basi. Vt uerò pyramidis à quaternario hedrarum, sic prismatis à quinario hedrarum in infinitum accretio est, ut sit à basi triangula, quadrangula, quinquangula, pentaëdrum, hexaëdrum, heptaëdrum & sic in infinitum. Sic Campanus prisma pressius definit, quàm Euclides & quinque planis tantùm compræhendit. Euclidis autem definitio generalis est, prismaque facit è quauis basi, triangula, quadrangula, multangula, ut fit pyramis. Errat autem Campanus etiam in eo quòd ex infinita prismatum multitudine unicum esse arbitratur: qui error ex Euclide natus uidetur qui prisma specialiter usurpat pro pentaëdro ad 40. p. 11. ad 3 & 4. p. 12. ut rectangulum in planis pro oblongo, & pyramidem in solidis pro tetraëdro ordinato.

Quot sunt consideranda in prismate?

Duo. I. Communia in geodæsia & comparatione. II. Species.

Quæ nam est Geodæsia prismatis?

Planus è basi & altitudine est soliditas recti prismatis. Geodæsia nempe parallelogrammi rectanguli (de qua suprà lib. 11.) est hic communis: cùm altitudinis plana sunt rectangula parallelogramma, sed res per species intelligetur.

Quæ nam est comparatio?

Est cum pyramide. Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine æqualis. πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 7. p. 12.

Quot sunt hîc consideranda?

Quatuor. Vsus, Corollarium, Demonstratio & Consectaria 4.

Quis est vsus huius elementi?

Ad pyramidum mensuram.

Quod nam est Corollarium?

Omnis pyramis est tertia pars prismatis æqualem basim & altitudinem habentis.

Quomodo id demonstratur?

Exemplo dissecti prismatis & digito melius demonstratur quàm ullo argumento: ubi uideas in prismate pentaedro tres pyramides æquales, duas extremas similes, tertiam ualdè tota figuræ specie dissimilem: in cubo similiter. At in parallelepipedo oblongo, in rhombo, rhomboide, dissimilitudo maior apparebit.

I. *Quod nam est primum consectarium?*

Planus è sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine æqualis.

Quomodo habetur altitudo pyramidis?

Si quadratum è radio basis, tollatur è quadrato lateris. Latus enim reliqui per 5. e. 12. erit altitudo.

Quot sunt hic exempla?

Tria. Nam pyramis est aut
- *Integra à basi*
  - *Triangula.*
  - *Quadrata.*
- *Curta à basi sexangula.*

I. Est in pyramide à basi triangula. Sit triangulum cuius latus quodlibet sit 12. Hic secundum 9.e. 12. latus continuè facti 3888, est 62 $\frac{44}{124}$ quæ est area trianguli & basis pyramidis. Altitudo est 9 $\frac{15}{19}$ quia per 7.e.18.latus potest triplum radij.(Multiplica 12 in se, factus erit 144, quem divide per 3, quotus erit 48: qui subductus à 144, relinquit 96.) At si de 144 quadrato 12 lateris tollatur subtriplum, id est, 48, reliquum 96 per 5. e. 12. erit altitudinis quadratum, quadratique latus erit 9 $\frac{15}{19}$. Tertia autem pars 3 $\frac{5}{19}$ ex qua & basi planus erit 203 $\frac{1103}{2375}$.

II. Est in pyramide à basi quadrata. Quadratum 36 tollatur à quadrato 292 $\frac{9}{1156}$ lateris 17 $\frac{3}{34}$ (Multiplica 17 per se factus est 289. Item 3 per se, factus est 9: & 34 per se, factus est 1156.) Reliqui 256 $\frac{9}{1156}$ latus erit 16 $\frac{3}{34}$ pro altitudine: cuius tertia 5 $\frac{30}{102}$ ex qua & basi 72 $\frac{1}{4}$ erit 387 $\frac{11}{24}$.

III. Est in pyramide curta à basi sexãgula. Metire totã & partẽ q̃ deest: tũ à tota detrahe quod defuerat. Sit latus totius 16 $\frac{5}{32}$ latus particularis 8 $\frac{1}{16}$ erit perpẽdicularis totius 15 $\frac{5}{32}$. tertia pars $\frac{5}{96}$ ex qua & basi 93 $\frac{3}{11}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in minore pyramide à quadrato lateris 65 $\frac{1}{256}$ sublato quadrato radij 9. reliqui 56 $\frac{1}{256}$ latus ferè 7 $\frac{1}{2}$ pro altitudine, cuius tertia pars fuit 2 $\frac{1}{2}$: basis ferè 22, ex

qua & tertia illa parte planus est 55 pro soliditate minoris pyramidis, qua deducta de maiore, reliquum 416 erit pro curta pyramide.

II. Quod'nam est secundum consectarium?

Prismata homogenea æquealta sunt ut bases. 29. 30, 31. 32. p. 11.

Quot sunt hic consideranda?

Duo. Demonstratio & Elenchus Euclidis.

Quæ'nam est demonstratio?

Est è 12. e. 4. ex quo hoc consectarium speciale deducitur. Nam,

Figuræ primæ æquealtæ sunt ut bases. 12. e. 4.
At prismata sunt multiplicia primarum, nempe pyramidum.
Prismata igitur æquealta sunt ut bases.

Sic longè præstantissima & nobilissima demonstratio una illa è geminis causis planè perfecteque satisfacit, quarum altera per altitudinem data, solum discrimen superest ex altera, id est, basi. Homogenea autem prismata requiruntur, quia pentaëdrum cum hexaëdro non ita conueniret.

Quottuplex est elenchus Euclidis?

Duplex. Nam in 4 propositionibus. 29. 30. 31. 32. p. 11. primò parallelepipedo tribuit, quod est prisma tis cõmune. Deinde ipsæ propositiones ualdè prepostero ordine positæ sunt. Nam 32 est maximè omniũ generalis & cæteras antecedẽtes speciales cõplexa: τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. Tum 31 simili ratione complectitur 29 & 30. τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 31. τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφε-

αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 29. τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 30. Omninoq; si 32 præcessisset, consequerentur tres reliquæ: item si præcessisset 31, concluderentur ex ea duæ 29 & 30. In 29 & 30 rectas insistentes, esse & non esse in ijsdem rectis, est superiorum planorum duo quælibet latera in unam rectam continuari aut non continuari, uel solida ipsa sub eandem rectam uel non eandem constitui.

III. *Quod'nam est tertium consectarium?*

Si prismata reciprocātur basi & altitudine, sunt æqualia. τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι: καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 34.p. 11. Consectarium est è 13.e.4. Deducta enim est propositio illa è primarum figurarum proprietate, ubi causæ efficientes illæ solæ sunt basis & altitudo. Itaq;,

Figuræ primæ reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales. 13.e.4.
At prismata sunt æquemultiplicia primarum.
Prismata igitur basi & altitudine reciproca, sunt æqualia.

IIII. *Quod'nam est quartum?*

Si prisma secatur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt ut bases. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. 25.p.11. Deducitur etiam è lege primarum figurarum: & duæ efficientes causæ solæ comparantur. altitudo & latitudo. Itaque cùm altitudo sit eadem, solum discrimen est è basis latitudine. Itaq;,

Prismata homogenea æquealta, sunt ut bases. 2.e.5.

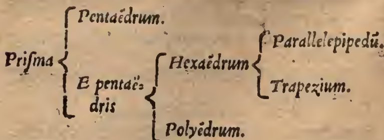
At segmenta prismatis, secti plano oppositis hedris parallelo, sunt prismata homogenea æquealta.

Segmenta igitur prismatis, sunt ut bases.

Campanus hic docet hanc propositionem conuenire serratilibus illis suis, i. prismatis pentaëdris, putatque omnia quæ Euclides solis parallelepipedis duodecim propositionibus undecimi attribuit, prismatis pentaëdris conuenire, quia sunt dimidia parallelepipedorum. Sed Campanus hîc non satis uidit. Omnibus enim prismatis nôn solùm serratilibus & pentaëdris conuenit quod proponitur. Atque hactenus communia prismatum: sequuntur eorum species.

Quottuplex est Prisma?

Duplex. Aut enim pentaëdrum est, aut è pentaëdris compositum. Solutio seu analysis, compositionem seu genesin ostendet.



Quod'nam est elementum de pentaëdris?

Si pentaëdra alterum basis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulum duplæ sunt æquealta, sunt æqualia. Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. 40.p.11.

Quot sunt hîc consideranda?

Quatuor. Causa æqualitatis, Demonstratio, Elenchus Euclidis & Geodæsia pentaedri.

Quæ nam est causa æqualitatis?

Causa breuis est, quia dimidia sunt eiusdem prismatis. Itaque,

Dimidia eiusdem sunt æqualia.

At duo pentaëdra alterum basis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulum duplæ, sunt dimidia eiusdem prismatis.

Sunt igitur æqualia. Quod prismate per diagonios oppositorum laterum bisecto intelliges.

Quæ nam est demonstratio Euclidis?

Primò sunto pentaëdra duo æquealta, primum basis triangulæ, secundum parallelogrammæ, duplæ ad triangulam. Secundò utrumque duplicetur & absoluatur: ut fiant parallelogramma duo. Tertiò ex thesi, basis parallelogrāma secundi pentaëdri, dupla est basis triangulę primi pentaëdri, ad quā tanquam dimidiam dupla est tota basis totius parallelogrammi per 4.c.6.e. 10 Itaque bases primi parallelogrammi & secundi sunt æquales; ideoq;,

Prismata homogenea æquealta, sunt ut bases. 32.p.11.2.c,5.e.

At hîc sunt prismata duo homogenea æquealta ex thesi.

Hîc igitur bases sunt æquales. Iam ex hac conclusione,

Si bases sunt æquales, prismata erunt æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia.

At illud.

Ergo & hoc.

Quottuplex est Elenchus Euclidis?

Duplex. Ordinis & Speciei. Nam primò præponi debuit. 32.p.11. quia de æqualitate præcipit. Secundò non

dò non satis accuratè proposuit. Debuit enim addere prismata pentaëdra: his enim solis id potest conuenire. Quomodo enim loquitur falsa est: ut si sumas prismata parallelepipeda hexaëdrâ eiusdē & basis & altitudinis, erunt æqualia per 32.p.11. At si alternis dimidium cum altero integro compares, erunt æquealta: alteriusque basis triangula, alterius parallelogramma dupla triangulæ, neque tamen erunt æqualia. Quare falsa est hæc propositio nisi specialiter intelligatur: tribuit enim generi quod est speciale.

Quænam est Geodæsia pentaëdri?

Prismatis pentaëdri geodæsia iam dicta est generaliter: res è duobus subiectis pentaëdris (uno basis parallelogrammæ, alterum triangulæ) intelligatur. Sit igitur primò prisma pentaëdrū, cuius altitudo sit 12, basis triangulæ latus sit 6. Iam planus ex 12 altitudine & 18 perimetro basis triangulæ (nam ter 6 sunt 18) est 216: area uerò basis triangulæ secundum 9.e.12. est $15\frac{1}{3}\frac{8}{1}$ (id est ferè $\frac{1}{5}$) Hæc bis assumpto, id est, $31\frac{1}{5}$ & cum plano 216 addita, componit $247\frac{1}{5}$ summam totius superficiei. At planus ex eadem basi $15\frac{3}{5}$ & altitudine 12 est $187\frac{1}{5}$ pro tota soliditate. Deinde sit secundum prisma pentaëdrum basis triangulæ (quī cuneus ex acumine dicitur, & qui propriè à secando prisma diceretur) cuius altitudo sit 3, basis triangula, ex tribus lateribus, 5, 12, 13. Iam planus ex 3 altitudine & 30 perimetro basis triangulæ, est 90: area uerò basis triangulæ secundum 9.e.12. est 30: hæc bis assumpta. i. 60. & cum plano 90 addita, componit 150 summam totius superficiei. At planus ex eadem basi 30 & altitudine 3, est 90 pro tota soliditate.

Quid est Parallelepipedum?

Cuius opposita plana sunt parallelogramma. Eaὶ

στερεὸν

στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι. 24. p. 11. Itaque parallelepipedum in solidis respondet parallelogrammo in planis, id est, quadrato, oblongo, rhombo, rhomboidi. Hic enim hedræ oppositæ sunt parallelæ, illic opposita latera sunt parallela.

Quot sunt hic consideranda?

Quinque: Captio Euclidis, Causa captionis, Consectaria, Communia, & Species.

Quæ nam est captio?

De certo genere plani præcipit, sed ualdè incerta oratione. Itaque Campanus hic obstrepens nescio cui, ait ista propositione solidum parallelis planis comprehensum tantū esse parilaterum quidem à senario terminorum numero deinceps infinitum, neque tamen paritermin ū quodlibet hic intelligi posse, sed parallelogrammum duntaxat, cùm omnes termini sunt parallelogrammi, ideoq; duntaxat sexaëdrum. Quod si uerum est, parallelepipedum respōdet in planis parallelogrammo.i.quadrato, oblongo, rhombo, rhomboidi. Itaque propositio ista uera tantùm esset de prismate, non de misto polyedro. Nec enim octaëdrum, icosaëdrum, dodecaëdrum (quamuis comprehensa è planis parallelis) habent oppositos terminos parallelogrammos: habent enim triangulos octaëdrum & icosaëdrum: dodecaëdrum autem habet quinquangulos.

Quæ nam est causa captionis?

Omissa partitio & definitio. Nam,

Si partitus esset Euclides genera solidi plani, si hoc ipsum parallelepipedum definisset, tota confusio esset sublata.

At genera plani non est partitus: & parallelepipedum non definiuit: sed ut in 33. & 34. p. 1. definitio parallelogrammi, ita hic prismatis paral-

parallelogrāmi definitio in propositionem sophisticè est conuersa.

Confusio igitur manet.

Quot sunt Consectaria?

Duo. I. Parallelepipedum bisecatur per diagonios oppositorum laterum. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, (δίχα τμηθήσεται) τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 28. p. 11. Hic duo sunt consideranda: Elenchus & Demonstratio. Nam primò ista propositio materiam principij ac definitionis habet. Ducitur enim è definitione parallelogrammi ad 34. p. 1. Vnde admonemur aliquid esse commune planorum & solidorum.i.figuræ parallelogrammæ proprium: imò esse omninò in omni magnitudine bisectionem aliquam, seu punctum, seu lineam, seu superficiem, quæ magnitudo bifariam secatur: id in figura plana diameter & diagonius (si est per angulos oppositos) dicitur, in solida nomine caret. Itaque nomine generali esset opus ad hanc generalem affectionem declarandum. Deinde quod ad demonstrationem attinet, esto prisma hexaedrum è basi quadrangula & bisecetur per diagonios oppositorum laterum, duo prismata secta erunt æqualia. Nam,

Comprehensa à basibus æqualibus multitudine & magnitudine, sunt æqualia.

At duo prismata parallelepipedi per diagonios bisecti, comprehenduntur à basibus æqualibus. Nam diagonij bisecant oppositas bases per 2.c.6.e. 10. & reliquæ bases oppositæ duorum prismatum dissectorum per 3. c. æquantur.

Duo igitur prismata talia sunt æqualia.

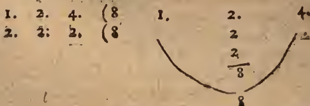
II. Si parallelepipedum bisecatur duobus planis bisecantibus opposita latera, communis bisectio & dia-

& diagonius, inter se bisecantur. Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. 39. p. 11. Potest esse omnis prismatis, dummodò diagonius generaliter in omni figura intelligatur, id nempe quo bisecatur figura: talis enim est in omni figura bisectio. Atque hoc quicquid est, demonstrabile omninò non fuit, nisi fortè & demonstrabile uideatur eiusdẽ figuræ parallelogrammæ diametros inter se bisecari: nihil enim aliud ista propositio loquitur. Itaque,

Diametri inter se bisecantur.
At in parallepipedo duob. planis bisecto, communis bisectio & diagonius sunt diametri.
Communis igitur sectio & diagonius inter se bisecantur.

Quæ nam sunt communia?

I. Si tres rectæ sunt proportionales, parallelepipedũ mediæ æquatur æquiangulo parallelepipedo omnium. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. 36. p. 11. Hæc propositio proponit generaliter de omni parallelepipedo æquiangulo, quod poterat similiter de quouis parallelogrammo æquiangulo. 16. & 17. p. 6. (unde hæc deriuantur) proponere. Sic semel bina quater sunt octo, & bis bina bis sunt tidem octo.



Sic bis

Sic bis quaterna octies sunt 64: & quater quaterna quater sunt etiam 64.

2.	4.	8.	(64.	2.	4.	8.
4.	4.	4.	(64.		4	
					4	
					64	
					64	

II. Parallelepipeda rectangula octo complent locum solidum. Id respondet in planis parallelogrammo rectangulo: utq; illic anguli plani recti quatuor complent locum planum, ita hic octo solidi anguli complent locum solidum: neq; hic magis proprium cubo quàm fuit antea quadrato: unde Aristotelis geometria illa emendatur.

III. Figuratus parallelepipedi rectanguli appellatur solidus, factus à trib. numeris. ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. 17.d.7. Vt si multiplices 1.2.3. semel duo ter, facies 6 solidũ: item si multiplices. 2.3.4. bis tria quater, facies 24 solidũ, & latera 6, erũt 1.2.3. solidi 24, erunt 2.3.4. Sic in planis planus absolutè appellatur, ut hic solidus: Vnde consectarium est: Si duo solidi sunt similes, habent proportionalia latera & duos medios proportionales, ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. 21.d.7. Similitudo hic aliud est quam proportio. Proportio enim quatuor terminos requirit, similitudo est duorum rationemq́, quatuor terminorum includit, quod in figuris geometricis proprium est & in figuratis numeris. Vide 19 & 21.p.8. Consectarium hoc est è 5. e. 22. Fiunt autem medij proportionales è lateribus similium, secundo, tertio, quarto: item tertio, quarto, quinto: ut hic uides.

Nam

2. 3. 5. 4. 6. 10.
30. 60. 120. 240.

Nam bis tria quinquies, ſunt 30: quater ſex decies ſunt 240. Itaq; 30 & 240 ſunt duo ſolidi ſimiles. Medij proportionales duo, 60 è ter quinque quater: & 120 è quinquies quater ſexies. Figuras habes apud Ramum 15.e.4.pag.30.

LIB. XXIIII. De Cubo.

Quottuplex eſt Parallelepipedum?

Duplex: Rectangulum & Obliquangulum. Rectangulum eſt cubus aut oblongum.

Quid eſt Cubus?

Eſt rectangulum iſoëdrum. κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. 25.d.11. Definitio cubi reſpondet, quadrati definitioni. Vtraq; enim figura eſt rectangula & rectitermina: ſed termini in quadrato latera dicuntur, in cubo hedræ, quæ tamen lateribus etiam definiuntur. Euclides definit cubum per genus generaliſſimum, tanquam ὑπάλληλον & ſubalternum deeſſet. At cubus eſt ſpecies parallelepipedi rectanguli, ut quadratum parallelogrammi rectanguli. De cubo myſterium uide apud Vitruuiū in proœmio lib.5.

Quot ſunt conſectaria huius definitionis?

Tria.

Quod nam eſt primum?

Cubi
- *Latera ſunt 12.*
- *Anguli*
  - *Plani ſunt 24.*
  - *Solidi ſunt 8.*

T Cur

Cur latera duodecim?

Quia cubus comprehenditur à sex hedris seu quadratis quaternorum laterum & angulorum. Itaq;,

Sex quadrata habent 24 angulos & latera.
At cubus comprehenditur à sex quadratis.
Cubus igitur habet 24 latera & angulos.

Vnumquodq; autem latus bis assumitur, ideoq; numerus est dimidio minor.

Cur angulos planos 24?

Quia 1. hedra habet 4 planos: ergo 6 habent 24.

Cur solidos 8?

Quia 3 plani faciunt unum solidum: ergo 24 faciunt 8. Hoc item est è scholio ad finem 15 libri Euclidis.

Quódnam est secundum?

Si sex quadrata æqualia solidis angulis componantur, comprehendent cubum.

Quodnam est tertium?

Si e quadrati angulis perpendiculares, lateribus æquales sublimè connectantur, comprehendent cubum. è 15. p. 11. Cõsectarium est e proximo superiore consectario. Itaq;,

Sex quadrata æqualia solidis angulis composita, comprehendunt cubum.
At perpendiculares è quadrati angulis, lateribus æquales sublimè connexæ, faciunt sex quadrata æqualia.
Perpendiculares igitur è quadrati angulis, lateribus æquales sublime connexæ, comprehendunt cubum.

Quot sunt consectaria in cubo?

Quatuor: Potentia diagonij, Cubi duplicatio, genesis & analysis.

Quænam est potentia diagonij?

Diagonius cubi potest duplum lateris. Nam,

Potens & latus & diagonium quadrati, (qui duplum

plum lateris poteſt, per 3.c.5.c.12.) poteſt triplum lateris.

At diagonius cubi poteſt & latus & diagoniũ quadrati.

Diagonius igitur cubi poteſt triplum lateris.

Quænam eſt duplicatio cubi?

Si quatuor rectarum continuè proportionalium prima ſit dimidia quartæ, cubus primæ erit dimidius ad cubum ſecundæ. è 53. p. 11. Conſectarium eſt è 1.c.15.c.4. Nam,

Vt prima recta eſt ad ultimam, ſic cubus primæ erit ad cubum ſecundæ.

At prima recta dimidia eſt quartæ.

Primæ igitur cubus eſt dimidius ad cubum ſecundæ.

Hinc problematis Deliaci ſolutio eſt ab Hippocrate primum depræhenſa. At duarum mediarũ meſographus ab Herone fuit 8.e.3.

Quottuplex eſt Geneſis ſeu inuentio cubi?

Duplex: Generalis & Specialis.

Quænam eſt generalis?

Solidus cubi etiam cubus dicitur, ſolidus nempè æqualium laterum. κύβος ἀριθμὸς ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις· ἢ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. 19.d.7. Itaq; fit à numero in ſuum quadratum multiplicato. Omnis enim cubus efficitur duplici multiplicatione numeri propoſiti, prima in ſeipſum, ſecunda in planũm ſeu factum. Itaq; ſi quadratus ſuum latus multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit. Atq; hæc primorum cuborum latera prompta debẽt eſſe, nec quærenda, ſed tenenda & uelut ante oculos habenda, ut hìc uides duodecim cubos à primis 12. notis arithmeticis.

Quænam est Geodæsia prismatis?

Planus è basi & altitudine est soliditas recti prismatis. Geodæsia nempe parallelogrammi rectanguli (de qua suprà lib. 11.) est hic communis: cùm altitudinis plana sunt rectangula parallelogramma, sed res per species intelligetur.

Quænam est comparatio?

Est cum pyramide. Prisma est triplum pyramidis basi & altitudine æqualis. πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν, διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 7.p.12.

Quot sunt hic consideranda?

Quatuor. Vsus, Corollarium, Demonstratio & Consectaria 4.

Quis est vsus huius elementi?

Ad pyramidum mensuram.

Quodnam est Corollarium?

Omnis pyramis est tertia pars prismatis æqualem basim & altitudinem habentis.

Quomodo id demonstratur?

Exemplo dissecti prismatis & digito melius demonstratur quàm ullo argumento: ubi uideas in prismate pentaëdro tres pyramides æquales, duas extremas similes, tertiam ualdè tota figuræ specie dissimilem: in cubo similiter. At in parallelepipedo oblongo, in rhombo, rhomboide, dissimilitudo maior apparebit.

I. *Quodnam est primum consectarium?*

Planus è sua basi & triente altitudinis est soliditas pyramidis basi & altitudine æqualis.

Quomodo habetur altitudo pyramidis?

Si quadratum è radio basis, tollatur è quadrato lateris. Latus enim reliqui per 5.e.12. erit altitudo.

Quot

Quot sunt hic exempla?

Tria. Nam pyramis est aut
- *Integra à basi*
  - *Triangula.*
  - *Quadrata.*
- *Curta à basi sexangula.*

I. Est in pyramide à basi triangula. Sit triangulum cuius latus quodlibet sit 12. Hic secundum 9.e. 12. latus continuè facti 3888, est 62 $\frac{44}{124}$ quæ est area trianguli & basis pyramidis. Altitudo est 9 $\frac{15}{19}$ quia per 7.e.18. latus potest triplum radij. (Multiplica 12 in se, factus erit 144, quem diuide per 3, quotus tus erit 48: qui subductus à 144, relinquit 96.) At si de 144 quadrato 12 lateris tollatur subtriplum, id est, 48, reliquum 96 per 5. e. 12. erit altitudinis quadratum, quadratique latus erit 9 $\frac{15}{19}$. Tertia autem pars 3 $\frac{5}{19}$ ex qua & basi planus erit 203 $\frac{1103}{2375}$.

II. Est in pyramide à basi quadrata. Quadratum 36 tollatur à quadrato 292 $\frac{9}{1156}$ lateris 17 $\frac{3}{34}$ (Multiplica 17 per se factus est 289. Item 3 per se, factus est 9: & 34 per se, factus est 1156.) Reliqui 256 $\frac{9}{1156}$ latus erit 16 $\frac{3}{34}$ pro altitudine: cuius tertia 5 $\frac{30}{102}$ ex qua & basi 72 $\frac{1}{4}$ erit 387 $\frac{11}{24}$.

III. Est in pyramide curta à basi sexãgula. Metire totã & partẽ q̃ deest: tũ à tota detrahe quod defuerat. Sit latus totius 16 $\frac{5}{32}$ latus particularis 8 $\frac{1}{16}$ erit perpẽdicularis totius 15 $\frac{5}{32}$ tertia pars $\frac{5}{96}$ ex qua & basi 93 $\frac{3}{11}$ planus erit 471 pro tota pyramide. At in minore pyramide à quadrato lateris 65 $\frac{1}{256}$ sublato quadrato radij 9. reliqui 56 $\frac{1}{256}$ latus ferè 7 $\frac{1}{2}$ pro altitudine, cuius tertia pars fuit 2 $\frac{1}{2}$: basis ferè 22, ex

qua & tertia illa parte planus est 55 pro soliditate minoris pyramidis, qua deducta de maiore, reliquum 416 erit pro curta pyramide.

II. Quod nam est secundum consectarium?

Prismata homogenea æquealta sunt ut bases. 29. 30, 31. 32. p. 11.

Quot sunt hîc consideranda?

Duo. Demonstratio & Elenchus Euclidis.

Quæ nam est demonstratio?

Est è 12. e. 4. ex quo hoc consectarium speciale deducitur. Nam,

Figuræ primæ æquealtæ sunt ut bases. 12. e. 4.
At prismata sunt multiplicia primarum, nempe pyramidum.
Prismata igitur æquealta sunt ut bases.

Sic longè præstantissima & nobilissima demonstratio una illa è geminis causis planè perfecteque satisfacit, quarum altera per altitudinem data, solum discrimen superest ex altera, id est, basi. Homogenea autem prismata requiruntur, quia pentaëdrum cum hexaëdro non ita conueniret.

Quottuplex est elenchus Euclidis?

Duplex. Nam in 4 propositionibus. 29. 30. 31. 32. p. 11. primò parallelepipedo tribuit, quod est prisma tis cōmune. Deinde ipsæ propositiones ualdè prepostero ordine positæ sunt. Nam 32 est maximè omniū generalis & cæteras antecedētes speciales cōplexa: τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις. Tum 31 simili ratione complectitur 29 & 30. τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 31. τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν

αἱ ἐφε-

μὴ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 29. τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 30. Omninoq; si 32 præcessisset, consequerentur tres reliquæ: item si præcessisset 31, concluderentur ex ea duæ 29 & 30. In 29 & 30 rectas insistentes, esse & non esse in ijsdem rectis, est superiorum planorum duo quelibet latera in unam rectam continuari aut non continuari, uel solida ipsa sub eandem rectam uel non eandem constitui.

III. *Quod'nam est tertium consectarium?*

Si prismata reciprocãtur basi & altitudine, sunt æqualia. τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι: καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 34.p. 11. Consectarium est è 13.e.4. Deducta enim est propositio illa è primarum figurarum proprietate, ubi causæ efficientes illæ solæ sunt basis & altitudo. Itaq;,

Figuræ primæ reciprocæ basi & altitudine, sunt æquales. 13.e.4.

At prismata sunt æquemultiplicia primarum.

Prismata igitur basi & altitudine reciproca, sunt æqualia.

IIII. *Quod'nam est quartum?*

Si prisma secatur plano oppositis hedris parallelo, segmenta sunt ut bases. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. 25.p.11. Deducitur etiam è lege primarum figurarum: & duæ efficientes causæ solæ comparantur: altitudo & latitudo. Itaque cùm altitudo sit eadem, solum discrimen est è basis latitudine. Itaq;,

Prismata homogenea æquealta, sunt ut bases. 2.c.5.

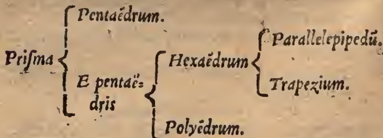
At ſegmenta priſmatis, ſecti plano oppoſitis hedris parallelo, ſunt priſmata homogenea æquealta.

Segmenta igitur priſmatis, ſunt ut baſes.

Campanus hîc docet hanc propoſitionem conuenire ſerratilibus illis ſuis.i.priſmatis pentaëdris, putatque omnia quæ Euclides ſolis parallelepipedis duodecim propoſitionibus undecimi attribuit, priſmatis pentaëdris conuenire, quia ſunt dimidia parallelepipedorum. Sed Campanus hîc non ſatis uidit. Omnibus enim priſmatis nõn ſolùm ſerratilibus & pentaëdris conuenit quod proponitur. Atque hactenus communia priſmatum: ſequuntur eorum ſpecies.

Quottuplex eſt Priſma?

Duplex. Aut enim pentaëdrum eſt, aut è pentaëdris compoſitum. Solutio ſeu analyſis, compoſitionem ſeu geneſin oſtendet.



Quod'nam eſt elementum de pentaëdris?

Si pentaëdra alterum baſis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulum duplæ ſunt æquealta, ſunt æqualia. Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δ' ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. 40.p.11.

Quot sunt hîc considerandа?

Quatuor. Causa æqualitatis, Demonstratio, Elenchus Euclidis & Geodæsia pentaedri.

Quæ nam est causa æqualitatis?

Causa brevis est, quia dimidia sunt eiusdem prismatis. Itaque,

Dimidia eiusdem sunt æqualia.

At duo pentaëdra alterum basis triangulæ, alterum parallelogrammæ ad triangulum duplæ, sunt dimidia eiusdem prismatis.

Sunt igitur æqualia. Quod prismate per diagonios oppositorum laterum bisecto intelliges.

Quæ nam est demonstratio Euclidis?

Primò sunto pentaëdra duo æquealta, primum basis triangulæ, secundum parallelogrammæ, duplæ ad triangulam. Secundò utrumque duplicetur & absoluatur: ut fiant parallelogramma duo. Tertiò ex thesi, basis parallelogrāma secundi pentaëdri, dupla est basis triangulę primi pentaëdri, ad quā tanquam dimidiam dupla est tota basis totius parallelogrammi per 4.c.6.e. 10 Itaque bases primi parallelogrammi & secundi sunt æquales, ideoq;

Prismata homogenea æquealta, sunt ut bases. 32.p.11.2.c.5.e.

At hîc sunt prismata duo homogenea æquealta ex thesi.

Hîc igitur bases sunt æquales. Iam ex hac conclusione,

Si bases sunt æquales, prismata erunt æqualia, ideoq; & ipsorum dimidia.

At illud.

Ergo & hoc.

Quottuplex est Elenchus Euclidis?

Duplex. Ordinis & Speciei. Nam primò præponi debuit. 32.p.11. quia de æqualitate præcipit. Secundò non

dò non ſatis accuratè propoſuit. Debuit enim addere priſmata pentaëdra: his enim ſolis id poteſt conuenire. Quomodo enim loquitur falſa eſt: ut ſi ſumas priſmata parallelepipeda hexaëdrâ eiuſdẽ & baſis & altitudinis, erunt æqualia per 32.p.11. At ſi alternis dimidium cum altero integro compares, erunt æquealta: alteriusque baſis triangula, alterius parallelogramma dupla triangulæ, neque tamen erunt æqualia. Quare falſa eſt hæc propoſitio niſi ſpecialiter intelligatur: tribuit enim generi quod eſt ſpeciale.

Quænam eſt Geodæſia pentaëdri?

Priſmatis pentaëdri geodæſia iam dicta eſt generaliter: res è duobus ſubiectis pentaëdris (uno baſis parallelogrammæ, alterum triangulæ) intelligatur. Sit igitur primò priſma pentaëdrũ, cuius altitudo ſit 12, baſis triangulæ latus ſit 6. Iam planus ex 12 altitudine & 18 perimetro baſis triangulæ (nam ter 6 ſunt 18) eſt 216: area uerò baſis triangulæ ſecundum 9.e.12. eſt 15 $\frac{1}{3}$ $\frac{8}{1}$ (id eſt ferè $\frac{3}{5}$) Hæc bis aſſumpto, id eſt, 31 $\frac{1}{5}$ & cum plano 216 addita, componit 247 $\frac{1}{5}$ ſummam totius ſuperficiei. At planus ex eadem baſi 15 $\frac{3}{5}$ & altitudine 12 eſt 187 $\frac{1}{5}$ pro tota ſoliditate. Deinde ſit ſecundum priſma pentaëdrum baſis triangulæ (qui cuneus ex acumine dicitur, & qui propriè à ſecando priſma diceretur) cuius altitudo ſit 3, baſis triangula, ex tribus lateribus, 5, 12, 13. Iam planus ex 3 altitudine & 30 perimetro baſis triangulæ, eſt 90: area uerò baſis triangulæ ſecundum 9.e.12. eſt 30: hæc bis aſſumpta. i. 60. & cum plano 90 addita, componit 150 ſummam totius ſuperficiei. At planus ex eadem baſi 30 & altitudine 3, eſt 90 pro tota ſoliditate.

Quid eſt Parallelepipedum?

Cuius oppoſita plana ſunt parallelogramma. Εὐ-

στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα, ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι. 24. p.11. Itaque parallelepipedum in solidis respondet parallelogrammo in planis, id est, quadrato, oblongo, rhombo, rhomboidi. Hic enim hedræ oppositæ sunt parallelæ, illic opposita latera sunt parallela.

Quot sunt hic consideranda?

Quinque: Captio Euclidis, Causa captionis, Consectaria, Communia, & Species.

Quæ nam est captio?

De certo genere plani præcipit, sed ualdè incerta oratione. Itaque Campanus hic obstrepens nescio cui, ait ista propositione solidum parallelis planis compræhensum tantũ esse parilaterum quidem à senario terminorum numero deinceps infinitum, neque tamen pariterminũ quodlibet hic intelligi posse, sed parallelogrammum duntaxat, cùm omnes termini sunt parallelogrammi, ideoq; duntaxat sexaëdrum. Quod si uerum est, parallelepipedum respõdet in planis parallelogrammo.i.quadrato, oblongo, rhombo, rhomboidi. Itaque propositio ista uera tantùm esset de prismate, non de misto polyedro. Nec enim octaëdrum, icosaëdrum, dodecaëdrum (quamuis compræhensa è planis parallelis) habent oppositos terminos parallelogrammos: habent enim triangulos octaëdrum & icosaëdrum: dodecaëdrum autem habet quinquangulos.

Quæ nam est causa captionis?

Omissa partitio & definitio. Nam,

Si partitus esset Euclides genera solidi plani, si hoc ipsum parallelepipedum definisset, tota confusio esset sublata.

At genera plani non est partitus: & parallelepipedum non definiuit: sed ut in 33.& 34. p.1. definitio parallelogrammi, ita hic prismatis paral-

parallelogrāmi definitio in propositionem sophisticè est conuersa.

Confusio igitur manet.

Quot sunt Consectaria?

Duo. I. Parallelepipedum bisecatur per diagonios oppositorum laterum. Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 28. p. 11. Hic duo sunt consideranda: Elenchus & Demonstratio. Nam primò ista propositio materiam principij ac definitionis habet. Ducitur enim è definitione parallelogrammi ad 34. p. 1. Vnde admonemur aliquid esse commune planorum & solidorum.i.figuræ parallelogrammæ proprium:imò esse omninò in omni magnitudine bisectionem aliquam, seu punctum, seu lineam, seu superficiem, quæ magnitudo bifariam secatur: id in figura plana diameter & diagonius (si est per angulos oppositos) dicitur, in solida nomine caret. Itaque nomine generali esset opus ad hanc generalem affectionem declarandum. Deinde quod ad demonstrationem attinet, esto prisma hexaedrum è basi quadrangula & bisecetur per diagonios oppositorum laterum, duo prismata secta erunt æqualia. Nam,

Comprehensa à basibus æqualibus multitudine & magnitudine, sunt æqualia.

At duo prismata parallelepipedi per diagonios bisecti, comprehenduntur à basibus æqualibus. Nam diagonij bisecant oppositas bases per 2.c.6.e. 10.& reliquæ bases oppositæ duorum prismatum dissectorum per 3. c. æquantur.

Duo igitur prismata talia sunt æqualia.

II. Si parallelepipedum bisecatur duobus planis bisecantibus opposita latera, communis bisectio & dia-

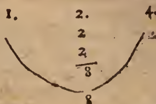
& diagonius, inter se bisecantur. Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος, δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. 39. p. 11. Potest esse omnis prismatis, dummodò diagonius generaliter in omni figura intelligatur, id nempe quo bisecatur figura: talis enim est in omni figura bisectio. Atque hoc quicquid est, demonstrabile omninò non fuit, nisi fortè & demonstrabile uideatur eiusdē figuræ parallelogrammæ diametros inter se bisecari: nihil enim aliud ista propositio loquitur. Itaque,

Diametri inter se bisecantur.
At in parallepipedo duob. planis bisecto, communis bisectio & diagonius sunt diametri.
Communis igitur sectio & diagonius inter se bisecantur.

Quæ nam sunt communia?

I. Si tres rectæ sunt proportionales, parallelepipedū mediæ æquatur æquiangulo parallelepipedo omnium. Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. 36. p. 11. Hæc propositio proponit generaliter de omni parallelepipedo æquiangulo, quod poterat similiter de quouis parallelogrammo æquiangulo. 16. & 17. p. 6. (unde hæc deriuantur) proponere. Sic semel bina quater sunt octo, & bis bina bis sunt iidem octo.

1. 2. 4. (8
2. 2: 2. (8



Sic bis

Sic bis quaterna octies sunt 64: & quater quaterna quater sunt etiam 64.

2. 4. 8. (64.
4. 4. 4. (64.

2. 4. 8.
4
4
64
64

II. Parallelepipeda rectangula octo complent locum solidum. Id respondet in planis parallelogrammo rectangulo: utq; illic anguli plani recti quatuor complent locum planum, ita hic octo solidi anguli complent locum solidum: neq; hic magis proprium cubo quàm fuit antea quadrato: unde Aristotelis geometria illa emendatur.

III. Figuratus parallelepipedi rectanguli appellatur solidus; factus à trib. numeris. ὅταν τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί. 17. d. 7. Vt si multiplices 1.2.3. semel duo ter, facies 6 solidũ: item si multiplices. 2.3.4. bis tria quater, facies 24 solidũ, & latera 6, erũt 1.2.3. solidi 24, erunt 2.3.4. Sic in planis planus absolutè appellatur, ut hic solidus. Vnde consectarium est: Si duo solidi sunt similes, habent proportionalia latera & duos medios proportionales, ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς. 21. d. 7. Similitudo hic aliud est quàm proportio. Proportio enim quatuor terminos requirit, similitudo est duorum rationemq́, quatuor terminorum includit, quod in figuris geometricis proprium est & in figuratis numeris. Vide 19 & 21. p. 8. Consectarium hoc est è 5. e. 22. Fiunt autem medij proportionales è lateribus similium, secundo, tertio, quarto: item tertio, quarto, quinto: ut hic uides.

Nam

2. 3. 5. 4. 6. 10.
30. 60. 120. 240.

Nam bis tria quinquies,ſunt 30:quater ſex decies ſunt 240.Itaq; 30 & 240 ſunt duo ſolidi ſimiles. Medij proportionales duo, 60 è ter quinque quater:& 120 è quinquies quater ſexies. Figuras habes apud Ramum 15.e.4.pag.30.

LIB. XXIIII. De Cubo.

Quottuplex eſt Parallelepipedum?

Duplex: Rectangulum & Obliquangulum. Rectangulum eſt cubus aut oblongum.

Quid eſt Cubus?

Eſt rectangulum iſoëdrum. κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.25.d.11.Definitio cubi reſpondet,quadrati definitioni.Vtraq; enim figura eſt rectangula & rectitermina: ſed termini in quadrato latera dicuntur,in cubo hedræ, quæ tamen lateribus etiam definiuntur. Euclides definit cubum per genus generaliſſimum; tanquam ὑπάλληλον & ſubalternum deeſſet. At cubus eſt ſpecies parallelepipedi rectanguli, ut quadratum parallelogrammi rectanguli.De cubo myſterium uide apud Vitruuiũ in proœmio lib.5.

Quot ſunt conſectaria huius definitionis?

Tria.

Quod'nam eſt primum?

Cubi { *Latera ſunt* 12.
Cubi { *Anguli* { *Plani ſunt* 24.
Anguli { *Solidi ſunt* 8.

Cur latera duodecim?

Quia cubus comprehenditur à sex hedris seu quadratis quaternorum laterum & angulorum. Itaq;

Sex quadrata habent 24 angulos & latera.
At cubus compræhenditur à sex quadratis.
Cubus igitur habet 24 latera & angulos.

Vnumquodq; autem latus bis assumitur, ideoq; numerus est dimidio minor.

Cur angulos planos 24?

Quia 1. hedra habet 4 planos: ergo 6 habent 24.

Cur solidos 8?

Quia 3 plani faciunt unum solidum: ergo 24 faciunt 8. Hoc item est è scholio ad finem 15 libri Euclidis.

Quódnam est secundum?

Si sex quadrata æqualia solidis angulis componantur, compræhendent cubum.

Quodnam est tertium?

Si è quadrati angulis perpendiculares, lateribus æquales sublime cōnectantur, compræhendent cubum. è 15. p. 11. Cōlectarium est è proximo superiore consectario. Itaq;

Sex quadrata æqualia solidis angulis composita, compræhendunt cubum.
At perpendiculares è quadrati angulis, lateribus æquales sublimè connexæ, faciunt sex quadrata æqualia.
Perpendiculares igitur è quadrati angulis, lateribus æquales sublimè connexæ, compræhendunt cubum.

Quot sunt consectaria in cubo?

Quatuor: Potentia diagonij, Cubi duplicatio, genesis & analysis.

Quænam est potentia diagonij?

Diagonius cubi potest duplum lateris. Nam,

Potens & latus & diagoniū quadrati, (qui duplum

plum lateris poteſt, per 3.c.5.c.12.) poteſt triplum lateris.

At diagonius cubi poteſt & latus & diagoniũ quadrati.

Diagonius igitur cubi poteſt triplum lateris.

Quænam eſt duplicatio cubi?

Si quatuor rectarum continuè proportionalium prima ſit dimidia quartæ, cubus primæ erit dimidius ad cubum ſecundæ. è 53. p. 11. Conſectarium eſt è 1.c.15.c.4. Nam,

Vt prima recta eſt ad ultimam, ſic cubus primæ erit ad cubum ſecundæ.

At prima recta dimidia eſt quartæ.

Primæ igitur cubus eſt dimidius ad cubum ſecundæ.

Hinc problematis Deliaci ſolutio eſt ab Hippocrate primum depræhenſa. At duarum mediarũ meſographus ab Herone fuit 8.e.3.

Quottuplex eſt Geneſis ſeu inuentio cubi?

Duplex: Generalis & Specialis.

Quænam eſt generalis?

Solidus cubi etiam cubus dicitur, ſolidus nempè æqualium laterum. κύβος ἀριθμὸς ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις· ἢ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος. 19 d.7. Itaq; fit à numero in ſuum quadratum multiplicato. Omnis enim cubus efficitur duplici multiplicatione numeri propoſiti, prima in ſeipſum, ſecunda in planũm ſeu factum. Itaq; ſi quadratus ſuum latus multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit. Atq; hæc primorum cuborum latera prompta debẽt eſſe, nec quærenda, ſed tenenda & uelut ante oculos habenda, ut hîc uides duodecim cubos à primis 12. notis arithmeticis.

1	1	1	
2	4	8	Bis duo bis.
3	9	27	Ter tria ter.
4	16	64	Quater quatuor quater.
5	25	125	Quinquies quinq; quinquies.
6	36	216	Sexies sex sexies.
7	49	343	Septies septem septies.
8	64	512	Octies octo octies.
9	81	729	Nouies nouem nouies.
10	100	1000	Decies decem decies.
11	121	1331	Vndecies undecim undecies.
12	144	1728	Duodecies duodecim duodecies.

Hæc generalis est inuentio cubi è stereometria & arithmetica.

Quæ nam est specialis?

Varia est in Euclide è continuè proportionalibus numeris & è cubis ipsis, unde repetito, siquidē fructum tantæ subtilitatis agnoueris.

Quænam est Analysis cubi?

Analysis quadrati lateris proprium theorema in Euclide habuit: Analysis cubi non habuit: analogiam tamen hic sequi licet & alteram geometricæ analyseos utilitatē proponere. Propositio per analogiam sic erit: Si recta secetur in duo segmenta, cubus totius rectæ æquabitur cubis segmentorum & duplici solido ter comptæhēso à quadrato sui segmenti & reliquo segmento.

Vt latus

Ut latus 12 secetur in 10 & 2 cubus 1728 ex toto 12, aequabitur

- *Duobus cubis 1000 & 8 è segmentis 10 & 2.*
- *Duplici solido, quorū*
  - *Primus 600 ter cōpraehenditur à 100 sui segmenti quadrato & à 2 reliquo segmento.*
  - *Secundus 120 ter item comprehenditur à 4 sui segmenti quadrato & à 10. segmento.*

1008.	*Duo cubi.*	100	2	3	(600. *Primus solidus.*
600	*Duplex solidum.*	10	4	3	(120. *Secūdus solidus.*
120					
1728.	*Cubus totus.*				

Sed rem totam genesis totius cubi facilius declarabit, quomodo nempe extremi & intermedij solidi generentur.

Quaenam ergo est genesis cubi 1728?

Fiat cubus è tribus aequalibus lateribus 12, 12, 12, atque in primis secundum latus primo multiplicetur. Sic,

```
  1 2
  1 2
 -----
  2 4
1 2
```

 Produ-

Productus notas ne addito, sed singulas per reliquum latus multiplicato & multiplicatas addito separatim, sic:

```
      2 4
    1 2
      1 2
  ---------
      4 8
    2 4
    2 4
  1 2
  ---------
  1, 6, 12, 8.
```

Itaq; latus 10 primi cubi singularis 1000, est alterum latus secundi solidi 120: eiusdemq; lateris 10, quadratus 100, est alterum latus primi solidi 600, cuius reliquum latus 2, est latus secundi cubi 8, eiusdemq; reliqui lateris 2 quadratus 4, est reliquum latus secundi solidi 120. In ista igitur æquatione quatuor solidorum cum uno solido, considerabis peculiarem genesim & compositionem:

1 ut cubus ultimus 8, fiat ex ultimo segmento 2.

2 ut secundus solidus 120, à 4 quadrato, sui segmenti 2 & 10 reliquo segmento ter comprehendatur.

3 ut primus solidus 600 à 100 quadrato sui segmenti & reliquo segmento 2, ter item comprehendatur.

4 ut cubus 1000 fiat è maiore segmento 10.

Quænam est Analysis cubi 1728?

Ex hac genesi, analysis contraria deducitur è mutua cuborum cū solidis colligatione, qualis in quadratis

dratis dicta est. Hic enim tametsi de solido agitur, attamen duo latera spectamus, quia alterum compositum & planum est. Primi igitur cubi 1000 latus 10, est clauis ad duos solidos & cubum sequentes aperiendum. Est enim alterum latus secundi solidi, quippe comprahensi ter ab eo & secundi segmenti quadrato. Est etiam eiusdem lateris 10 quadratus 100, latus alterum primi solidi 600, compræhensi nempe ter ab hoc quadrato 100 & reliquo segmento 2: est etiam reliquum primi solidi latus 2. latus sequentis cubi: ac postremò eiusdem lateris 2 quadratus reliquum latus secundi solidi. Hoc igitur uelut Ariadnes filo tam uarij laterũ errores explicantur, ut in quadratis fuit. Nam cũ latera singulorum cuborum inueneris, latus etiam cubi totius inueneris: tãetsi enim cubus uniuersus est maior cubis partium: attamen latus uniuersum est æquale lateribus singularium cuborum, & solidis intermedijs duntaxat utimur ad cubi sequentis latus inueniendum. Quæratur igitur latus cubi 1728. Primum notabis punctis ultimum & millenarium, denique quemcunque locum. Deinde cubi maximi in primum punctum desinentis inueni latus cubicum, hic erit 1: seorsum nota 1, & lateris cubum tolle de numero desinente in idem punctum nihil manebit: sic 1728 (1. Hoc primum singularis cubi latus est: Secundò latus idem triplicetur, fient 3, primum latus secundi solidi. Hic numerus triplus dicitur, subijciturq; eidem solido sic:

$\overset{\cdot}{1}\ 7\ 2\ \overset{\cdot}{8}$ (1.
$\ \ \cdot\ \ 3$

Idem latus quadretur, erit 1 & cum quadratũ fuerit triplicatum, erit 3 primum latus primi solidi, & diuisor dicitur, eidemq; solido subijcitur, sed inferius, ut à triplo seiungatur sic,

+ 7 2 8 (1.

3

3

Idem etiam diuisor habetur multiplicatione quoti per triplum, quia solidus idem est quocunq; ordine tria eius latera multiplicentur. Per inuentum diuisorem diuide primum solidum, emergit 2 reliquũ eiusdem primi solidi latus. Atq; latus hoc reliquum, quia sequentis cubi latus est, cum superioris cubi latere deinceps adnota, & per quotum 2 multiplica 3 diuisorem, facies 6 subijcienda diuisori. Postremò idem latus 2 quadretur, fiet 4 reliquum latus secundi solidi: 4 igitur per 3 triplum multiplicatis fiunt 12, item subijcienda secundo solido. Deniq; 2 latus cubi cubatum facit 8 subijcienda sequenti puncto: adde tres summas 6. 12. 8. facies 728, quibus subductis nihil manebit, sic:

1 7 2 8 (12.

3

3 4

6

1 2 8

---

7 2 8

Quid si cubi singulares duobus plures fuerint?

Tum latera præcedentia pro unico sumuntur. Vt si quæratur latus cubi 34012224, notatis locis cubicis, latus primi cubi erue, sic:

7

3 4 0 1 2 2 2 4 (3.

Denique secundi singularis cubi latus sic eruatur.

1
7 2 4 4
3 4 0 1 1 2 2 4 (34.
9 4
2 7 4
5 4
3 6 8

---

5 7 6 8

Hîc igitur cum duo latera ſint tanquam unicum triplicandum & triplum ſubijciendum ſecundo ſolido: eadém duo latera uelut unicum quadretur, quadratumq; triplicetur, fient 3072 primo ſolido pro diuiſore ſubijcienda: per hunc diuiſorem diuide primum ſolidum, quotus erit 4, per quem multiplicato diuiſorem 3072, facies 12288. Poſtremò quadra 4 quotum: fient 16: ijs multiplica triplũ 96, fient 1536 ſubijcienda triplo. Tandem etiam quotum cubatũ, id eſt 64 ſubijce puncto ſequenti & tres ſummas addito, & ſubducito, nihil manebit: ſic

1 2 4 4
3 4 0 1 2 2 2 4 (324
9 6 4
1 6
3 1 7 2

---

1 2 2 8 8
1 5 3 6
6 4

---

1 2 4 4 2 2 4

Quid si post cubicum latus iam repertum, locus proximus neq; solidus est ullus, neq; cubus, hoc est, si diuisor maior est suo diuidendo?

Tum lateri inuento circulus adscribendus est, ut in cubo 8120601 (201.

Quid si secundum latus primi solidi sit maius latere sequentis cubi?

Tum solidus diuisus partem secundi solidi complectebatur, ideoq; minuendum latus illud est: ut in cubo 17576 primum latus erit 2, secundum si feceris 7 (ut uidetur initio fieri posse) facies primi solidi secundum latus maius latere sequentis cubi. Itaq; latus illud minuatur, & pro 7 sume 6, latus legitimum produces: analysis tota erit 17576 (26. Hæc uia generalis est & communis ad quamlibet magnum cubi latus retexendum. Sic in cubo 312908547069 latus inuenietur 6789.

Estne in partibus quoq; cubi ratio?

Est. Nam si propositus numerus cubus non est, nullum est eius in numeris uerum latus, cubi tamen in eo maximi uerum latus erui potest: ut in 17616, cubus cōtinetur 17567 & latus eius est 26 & supersunt 40. Latus itaq; numeri non cubi nullum tam accuratum reperietur unquā, quin accuratius inueniri possit: ut de quadrato iam dictum est.

Quot sunt igitur modi cubicum latus vero propinquum inquirendi?

Duo.

Quis est primus?

Primus modus subducit duos solidos & ultimū cubum in proximo maiore cubo cōpræhensos, quo intelligatur duorum continuorum cuborum distantia, sicut antea duorum quadratorum distantia intellecta est. Illic enim cubicus gnomo quidam recurrit, quem conceptis tribus planis cubi, uti gnomonem

nem quadrati è duobus quadrati lateribus. Sic in exemplo 17616, ubi latus est 26 & supersunt 40 sequentis cubi, cuius latus est 27. Diuides 27 in 26 & 1, & ut antea didicisti solidos hinc & cubum facies, primus solidus comprahendetur ter a 676 quadrato segmenti 26 & 1 reliquo segmento. Itaque erit 2028: secundus comprehenditur ter à quadrato 1: & reliquo segmento 26 & erit 76. Cubus autem 1 est 1: adde igitur illos duos solidos, & hunc cubum, habebis 2107 pro nominatore, qui 40. Itaq; latus 17616 est $26\frac{40}{2107}$, quo intelligitur, ut antea in quadrato, quantum numerus 40 abest à nomine 2107, tantum cubum propositum abesse à proximo maiore. Itaq; si numeratorem 40 tollas à nominatore 2107 & reliquum 2067 addas 17616, totus erit 19683, cubus lateris 27.

Quae est [illegible]?

Est per partes magni cuiusdam nominis sed cubicas, ut earum latus iam certum sit, ut numerus idem 17616 reductus ad centesimas cubicas, id est ad 1000000 facit 17616000000, cuius numeri latus est 2601 pro numero datarum centesimarum, sic $\frac{2601}{100}$, id est $26\frac{1}{100}$ & supersunt 19712199: quae ne centesimam quidem inuento lateri possunt addere, quia differentia cubi proximae maioris maior est, ideoque reliqua illa despiciuntur. Atque haec de cubo.

Quaenam est Stereometria in reliquis parallelepipedis?

Praecipua nulla est, Prismatis geodaesia est exposita prius, exemplis tantum specialibus opus est.

Quaenam est Stereometria cubi?

I. Quaeritur tota superficies. Planus enim è basis perimetro 20 & altitudine 5 est 100. Additus utrique basi 25 & 25, id est 50, totus est 150 pro tota superficie.

II. To-

II. Tota soliditas. Planus enim è basi 25 & altitudine 5 est 125 pro tota soliditate.

Quae nam oblongi?

I. Tota superficies. Planus enim è basis perimetro 20 & altitudine 11 est 220, qui additus basibus 24 & 24, id est 48 componit 268 pro tota superficie.

II. Tota soliditas. Nam planus è basi 24 altitudine 11 est 264 soliditate. Atq; eadem geodæsia erit in dimetiendis parietibus rectãgulis uel portis aliquo fenestra aut cauitate uacuis, si uacua ipsa detrahantur.

Quomodo in portis?

Spissitudo sit 3 pedum, latitudo 12, altitudo 11: tota soliditas est 396: ac porta sit spissitudinis 3 pedũ, latitudinis 4, altitudinis 6, soliditasque portæ 72 pedum: quibus subductis à toto pariete, restãt 324 pro reliquo parietis corpore.

Quomodo in cauitate?

Longitudo pedum 10, latitudo 8, altitudo 7, faciunt totius corporis 560 pedes. Cauitas longitudinis 6, latitudinis 4, altitudinis 7 facit 168: quibus subductis de 560, reliqui summa est 392. Sic amplissimi ædificij parallelepipedos parietes, murosq; omnes metiri liceat.

Quae nam est geodæsia in rhombo, rhomboide, trapezio & quolibet multangulo?

Basis metienda est, ut prius: tum ex ea & altitudine soliditas constabit. Vt in rhombo basis 24 altitudinis 4 soliditas est 96: in rhomboide basis 64 $\frac{35}{129}$ altitudinis 11, soliditas 1028. $\frac{44}{129}$. Eadem geodæsia est trapezij & prismatis polyëdri. Atq; hinc uasorum qualibet plani soliditatis specie figuratorum capacitas æstimari potest. Hic enim planus è basi sexangula 41 $\frac{1}{7}$ (radius enim est latus per c. 6. 18.) & altitudine 5 erit 205 $\frac{5}{7}$. Itaq; si pes cubicus contine-

At 4 quartas, ut Parisienses loquuntur, uas continebit quartas $822\frac{6}{7}$, id est ferè 823: deest enim uno septima.

1 continet 4: ergo $205\frac{5}{7}$ continebunt $822\frac{6}{7}$.

LIB. XXV. De Polyëdris mistis ordinatis.

Quid est Polyëdrum mistum ordinatum?

Est pyramidatum cōpositum è pyramidibus uertice coëuntibus in centro & sola basi eminentibus.

Quomodo differt a pyramide & prismate?

Pyramis ab una basi fastigiatur: mistum non itē. Prismatis opposita plana sunt æqualia, similia, parallela: hoc conuenit polyëdro. At reliqua plana prismatis sunt parallelogramma, quod neq; octaëdro, neq; icosaëdro, neque dodecaëdro conuenire potest: cum plana octaëdri & icosaëdri sint triangula, dodecaëdri quinquangula.

Quot sunt in eo consideranda?

Duo: Geodæsia & Species.

Quænam est Geodæsia polyedri misti?

Cùm polyëdrum mistum ordinatum componatur è pyramidibus, geodæsia ipsius erit è geodęsia pyramidum componentium: basisq; una per numerum omnium basiū faciet corporis superficiē & pyramis una per numerum omnium pyramidum multiplicata, faciet soliditatem.

Quomodo habetur altitudo componentis pyramidis?

Per radium circuli basi circumscripti, perq; polyëdri semidiagonium. Basis pyramidis patet oculis, altitudo intus latet, inuenitur autem per triangulum rectangulum, cuius basis est semidiagonius, crura

radius

radius circuli & perpendicularis altitudinis. Itaque sublato radij quadrato de quadrato semidiagonij, latus reliqui per 5.e.12. erit altitudo. Sed radius circuli specialem inuentionem per species basis triangulæ primum, deinde quinquangulæ habebit.

Quottuplex est inuentio radij circularis?

Duplex est è subiectis basibus: est enim triangulæ basis aut quinquangulæ. Itaq; si quadratus è latere triangulæ basis trifariam diuidatur, latus trientis erit radius circuli, basi circumscripti: ut patet per 7.e. 18. Atque hec radij circularis inuentio est pro octaëdro & icosaedro.

Quottuplex est polyëdrum triangulæ basis?

Duplex: Octaëdrum aut Icosaëdrum.

Quid est Octaëdrum?

Est polyëdrum mistum ordinatum, quod ab octo triangulis comprehenditur. ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 27.d. 11. Hæc definitio comprehendit sub æquilateris planis æqualitatem angulorum. Diagrāmata hic duo sunt: monogrammum & solidum.

Quot sunt hic consideranda?

Duo: Consectaria tria & Comprehensio.

Quæ nam sunt consectaria?

I. Octaëdri	*Latera sunt* 12.		*Hoc item est è scholio ad finem lib. 15. Euclidis.*
	Anguli	*Plani* 24.	
		Solidi 6,	

II. Octaëdra nouem complent locum solidum. Nam,

Octo solidi recti complent locum solidum.

At no-

At nouem anguli octaëdri, ualent octo solidos rectos: Quadruplex enim angulus tetraëdri æquatur tripl ci tetraëdri, & dodecuplex i. deo nuncuplici. Vt enim 4 ad 3; ita 12 ad 9. At 12 anguli tetraëdri faciunt aut æquant 8 solidos. Ergo & nouem anguli octaëdri, æquant 8 solidos.

Ergo nouem anguli octaëdri complent locum solidum.

Et ita Po[illegible] demonstratio ex angulis, consentanea demonstrationi Euclidis (item ex angulis, quod quam; tantum solida [illegible] ordinata demonstratio) octaëdrum solidi loci complerituum efficiet contra Ari[illegible] in planis, sic in solidis triplex figura complebit locum.

III. S. triangula octo æquilatera & æqualia solidis angulis componantur, compræhendent octaëdrum. Hæc fabrica facilis est cum duplicis tetraëdri duo triangula æquilatera æqualia intersecantur.

Quæ nam est comprahensio octaëdri?

Si recta centro quadrati utrinq; perpendicularis æqualis semidiagonio connectatur cum angulis: comprehendet octaëdrum. ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰς πυραμίδας: καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. 14. p. 15. Hæc propositio tres partes habet, quæ geometricam proportionem in tertia parte continet: de qua in primo corollario dicemus.

Quot sunt hîc considerandæ?

Tria: Demonstratio, Consectaria & Campani deductiones.

Quænam est demonstratio?

Aequans octo latera, octoq; triangula: comprehendit octaëdrum.

At perpendicularis æqualis semidiagoniis quatuor & connexa cum angulis æquat octo latera

tera per 2.e.7.octoque triangula.

Perpendicularis igitur comprӕhendit octaëdrum.

Quot sunt consectaria?

Duo: I.Est tertia pars propositionis 14: Diagonius octaëdri potest duplum lateris. Vt patet per 5. e.12. Nam si basis trianguli rectanguli bisecetur à perpendiculari ex angulo recto: poterit duplū proportionalis inter sectam & bisegmentum ut patet ex 8.p.6.& 47.p.1.

II.Si quadratum de latere octaëdri duplicetur: duplicati latus erit diagonius. Vt si latus octaëdri sit.6: id quadratum facit 36, quod quadratum duplicatū est 72: cuius latus $8\frac{1}{8}$ est diagonius. Atq; hinc existet geodæsia octaëdri.

Quæ nam est geodæsia octaëdri?

Est per semidiagonium, radium circuli, altitudinem perpendicularem, & pyramidem. Itaq;,

I. Semidiagonius est $4\frac{4}{17}$; cuius quadratum est $17\frac{271}{289}$.

II.Radius circumscripti circuli. Quadratum de 6 latere trianguli æquilateri potente per 4.e.18. triplū radij est 36, eq; 12. triente latus $3\frac{3}{7}$.est radius circūscripti circuli.

III.Altitudo perpendicularis. Sublato quadrato 12 de quadrato $8\frac{8}{17}$ restabunt $5\frac{271}{289}$ quadratū perpēdicularis: cuius latus $2\frac{1}{5}$ est ipsa altitudo perpendicularis.

IIII.Pyramis. Nam altitudinis perpendicularis pars tertia est $\frac{11}{15}$ quæ per $15\frac{18}{31}$ basim triāgulam faciant $11\frac{66}{155}$ pro octaua pyramide, quæ multiplicata per 8 facit $91\frac{63}{155}$ pro toto octaëdro.

Quæ nam sunt Campani deductiones ex 14.p.13?

Tres sunt: I.Octaëdrum secari in duas pyramides æqua-

æquealtas, quarum altitudo sit radius sphæræ, basis autem quadratum subduplum ad quadratum axis.

II. Basim tetraëdri esse potentia sesquitertiam ad basim octaëdri eidem sphæræ inscripti. Nam,

Triangula in quadratis eadem basi habebunt rationem quadratorum: hoc est, ut se habent quadrata, ita triangula in quadratis eadem basi se habebunt.

At quadratum lateris tetraëdri est ad quadratum lateris octaëdri, ut 4 ad 3. $\frac{4}{3}$ (1 $\frac{1}{3}$.

Itaque & triangula basis ad triangulam basim talis erit.

Contrà docet superficiem octaëdri esse sesquialteram ad superficiem tetraëdri. Nam,

Cùm superficies octaëdri constet è basibus 4, quarũ quælibet sit ut 4: omnes erunt ut 16. *Contrà cùm superficies octaëdri constet ex octo talibus basibus quarũ quælibet sit ut 3. Ergo omnes erunt ut 24.*	*Tota igitur superficies octaëdri ad superficiem tetraëdri erit ut 24 ad 16. id est, sesquialtera.*

III. Octaëdrum ad octaëdrum eidem sphæræ inscriptum, ut quadratum axis ad rectangulum è recta potente sesquitertium ad tres quartas lateris tetraëdri, & è recta superquintupartiente uicesimas

 septi-

ſeptimas earum quartarum. Indidem ab eodem Campano deducitur: Perpendicularem à centro ſphæræ in baſim tetraëdri inſcripti ęqualem eſſe ſextæ parti axis. Quæ omnia Geometram ingenij plenum demonſtrant: mallem demonſtrarent de artis uſu fructuque ſollicitum: talium enim inuentionum ultima nunquam dabitur.

Quid eſt Iſocaëdrum?

Eſt polyëdrum miſtum ordinatum, à uiginti triangulis compræhenſum. Εἰκοσάεδρον ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 29. d. 11. Hæc definitio æqualitatem angulorum comprçhendit ſub æqualitate laterum ut 27.d.11. Hoc enim ex baſibus triangulis utrique commune eſt.

Quot ſunt hic conſideranda?

Triá. Conſectaria duo, Compræhenſio & Diagonius.

Quænam ſunt hic conſectaria?

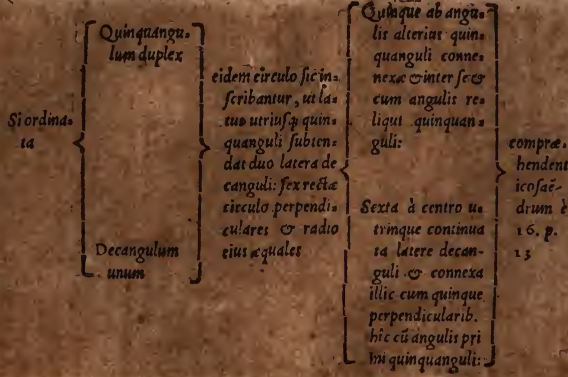
I. Icoſaëdri
- *Latera ſunt* 30.
- *Anguli*
  - *Plani* 60.
  - *Solidi* 12.

Hoc itē eſt è ſcholio ad finem 15. lib. Euclidis.

II. De fabrica: Si uiginti triangula ordinata & æqualia, ſolidis angulis componantur: compræhendent icoſaëdrum. Fabrica hæc prompta eſt è tetraëdris quinque.

Quænam

Quænam est comprahensio icosaëdri?



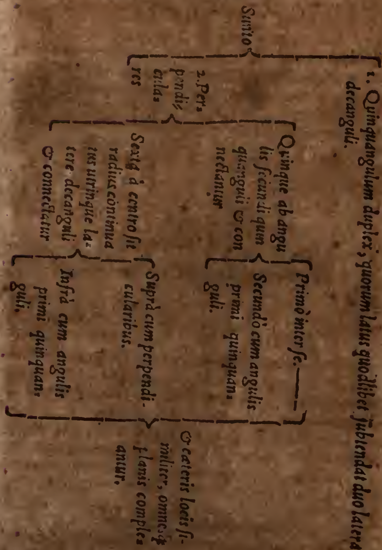
Quot sunt hîc consideranda?

Tria. Causa, Diagramma & Demonstratio.

Quænam est causa?

Quia fient uiginti triangula æquilatera & æqualia.

Quodnam est diagramma?



Hocdico

Hoc dico icoſaedrum eſſe & à uiginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehendi.

Quæ nam eſt demonſtratio?

Viginti triangula æquilatera & æqualia conſtituunt icoſaedrum.

At in iſta comprehenſione ſunt uiginti triangula æquilatera & per c.6,e.7. æqualia.

Iſta igitur comprehenſio comprehendit icoſaedrum.

Quomodo demonſtratur aſſumptio?

Per triangula particularia, nimirum intermedia 10, ſupera quinque & infera quinque. Itaque primò intermedia decem triangula perpendicularibus omiſſis æquilatera eſſe & æqualia, unum triangulum demonſtrabit.

Quot ſunt elementa de diagonio?

Duo: Vnum de ἀλογίᾳ, alterum de potentia eius.

Quæ nam eſt diagonij ἀλογία?

Diagonius icoſaedri eſt irrationalis ad latus. Quartum eſt exemplum ἀλογίας vel ἀσυμμετρίας. Primum fuit de diagonio & latere quadrati, ſecundum de ſegmentis rectæ proportionaliter ſectæ: tertium de diametro circuli & latere quinquanguli.

Quæ nam eſt eius potentia?

Diagonius icoſaedri poteſt quintuplum circularis radij. Nam per 8. e.18. continuata è latere ſexanguli & decanguli ſecatur proportionaliter, & maius ſegmentum eſt latus ſexanguli. Nam,

Cùm dimidium poteſt quintuplum biſegmenti: totum poterit quintuplum totius biſecti.

At dimidium diagonij poteſt quintuplum biſegmenti: nam minus ſegmentum continuatum dimidio maioris, poteſt per 5.e.14. quintuplum eiuſdem dimidij.

Diagonius igitur tota poteſt quintuplum totius biſecti.

Atque hinc etiam erit geodæsia icosaëdri.

Qualis est geodæsia icosaëdri?

Per semidiagonium, altitudinem perpendicularem, & pyramidem. Semidiagonius est è latere decanguli & semiradio circuli. Latus autem decanguli est recta subtendens dimidiam peripheriam lateris quinquangularis, uel maius segmentum radij proportionaliter secti. Sic enim Geometricè sumi potest & pro sua mensura numerari. Itaque si quadratum è latere decanguli, tollatur à quadrato è latere quinquanguli: relinquetur per 9. c. 18. quadratum è latere sexanguli. i. è radio. Itaque,

I. Latus decanguli (quia latus quinquanguli hîc est 6) erit $3\,\frac{3}{3\;5}$ recta nempe subtēdens dimidiam peripheriam.

II. Semiradius sic habebitur. Quadrata quinquanguli & decanguli sunt $369\,\frac{\;6\;3\;9}{1\;2\;2\;5}$: & subductione huius ab illo, reliquum quadratum sexanguli per 9. c. 18. est $26\,\frac{\;5\;8\;9}{1\;2\;2\;5}$, & reliqui latus pro radio est 5. & ferè $\frac{5}{7}$. Semiradius igitur est $2\,\frac{6}{7}$. Adde latus decanguli $3\,\frac{3}{3\;5}$ cum $2\,\frac{6}{7}$, totum erit $5\,\frac{3\;5}{3\;5}$ pro semidiagonio icosaëdri.

III. Radius circuli triangulo circūscripti est per 7. c. 18. idē qui prius $3\,\frac{3}{7}$ è quadrato nempe 12. Itaq;

Si quadratum circularis radij tollatur à quadrato semidiagonij, relinquetur quadratum altitudinis & perpendicularis.

At quadratū semidiagonij est $35\,\frac{\;3\;8\;9}{1\;2\;2\;5}$: quadratum radij circularis est 12.

Hoc igitur ab illo sublatū, relinquit $23\,\frac{\;6\;8\;9}{1\;2\;2}$: cuius latus est ferè 5 pro perpendiculari & altitudine proposita: unde iam pyramis æstimetur.

IIII. Pyramis. Basis pyramidis triangulę est $15\,\frac{5\;8}{3\;1}$

Planus

Planus ex hac basi & tertia altitudinis est $25\frac{3}{5}\frac{0}{1}$. Quibus per 20 multiplicatis, summa icosaëdri est $519\frac{1}{3}\frac{1}{1}$.

Quid est Dodecaëdrum?

Est polyëdrum mistum ordinatum quinquangulæ basis, quod à duodecim quinquangulis comprehenditur.

Quot sunt in eo consideranda?

Quatuor: Consectaria, Compræhensio, Diagonius, Latus.

Quot sunt consectaria?

Duo. I. Dodecaëdri { *Latera sunt* 30. ; *Anguli* { *Plani* 60. ; *Solidi* 20 } } *Hoc item est è scholio lib. 15. Euclidis.*

II. Si duodecim quinquangula ordinata æqualia solidis angulis componantur, compræhendent dodecaëdrum.

Quæ nam est compræhensio dodecaëdri?

Si cubi latera rectis bisecentur, ternaq; bisegmenta bisecantium in contermınis planis neq; concurrentium neq; parallelarum, duo unius, tertium reliquæ uicinum proportionaliter ita secentur, ut minora segmenta bisecantem terminent, ternæ extra cubum dictis planis perpendiculares à proportionalium sectionum punctis, æquales maioribus segmentis connexæ duæ ex eadem bisecante inter se & cum uicinis cubi angulis, tertia cum angulis eisdem: comprehendent dodecaëdrum. 17. p. 13.

Quot sunt hîc consideranda?

Duo: Diagramma & Demonstratio.

Quale est diagramma?

Sunto:

1. *Cubi duo plana pro omnibus (ut unum quinquangulum pro duodecim describatur:) eaq́;* { *Contermina,* / *Lateribus bisecta.*

2. *Tria bisegmenta bisecantiũ neq; concurrentiũ neq; parallelarum: & quodlibet bisegmentum secetur proportionaliter, ita ut minora segmenta terminent bisecantem.*

3. *Tres perpendiculares extra cubum à proportionalium sectionum punctis, æquales maioribus segmentis connexæ duæ ex eadem bisecante inter se & cum uicinis cubi angulis, tertia cum angulis eisdem: omnésque planis compleantur.*

Quottuplex est demonstratio?

Triplex: quòd scilicet unũ illud quinquangulum sit 1. æquilaterum. 2. planum. 3. æquiangulum.

Quid de diagonio?

Diagonius est irrationalis ad latus dodecaëdri. Et hoc quintum est exemplum ἀλογίας & ἀσυμμετρίας. Primum fuit de diagonio & latere quadrati, secundum de secta proportionaliter & eius segmentis, tertium de diametro circuli & latere quinquanguli inscripto, quartum de diagonio & latere icosaëdri: quintum modò est de diagonio & latere dodecaëdri.

Quid de latere?

Si latus cubi secetur proportionaliter, maius segmentum erit latus dodecaëdri. Hinc etiam est geodæsia dodecaëdri.

Ut quo

In quo est geodæsia dodecaedri?

Est in
- *Semidiagonio. Nam si subtendens angulum quinquanguli quadrata triplicetur, triplicatæ dimidiatum latus erit semidiagonius dodecaedri: quia per 3 c. 24 diagonius cubi, id est, dodecaëdri potest triplum lateris cubici.*
- *Radio circuli. Nam si quadratum è latere decanguli tollatur de quadrato è latere quinquanguli, latus reliqui erit radius circuli quinquangulo circumscripti.*
- *Altitudine perpendiculari. Nam si tollatur quadratum radij à quadrato semidiagonij, reliqui latus erit perpendicularis altitudo.*
- *Pyramide. Exemplum in Ramo facile est.*

Quot plana solida sunt ordinata?

Tantùm quinque: quod patet ex anguli solidi natura per species planarum figurarum.

Ex basi
- *Triangula*
  - *Tetraëdrum. 1.*
  - *Octaëdrum. 2.*
  - *Icosaëdrum. 3.*
- *Quadrangula Cubus. 4.*
- *Quinquangula Dodecaëdrum. 5.*

LIBER XXVI. De Sphæra.

Quid est solidum gibbum?

Quod compræhenditur à superficie gibba: estque sphæra aut uarium.

Quid est Sphæra?

Est gibbum rotundum, uel quod à sphærico compræhenditur. De sphæra Stereometria Euclidis perexigua est in 17.18.p.12.

Quot sunt in ea consideranda?

Quinque: Fabrica, Maximus circulus, Geodæsia, Ratio, Adscriptio.

Quæ nam est eius fabrica?

Sphæra fit conuersione semicirculi manente diametro. Σφαῖρά ἐστιν ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. 14.d.11: Euclides sphæram definit è modo fabricandæ sphæræ, quomodo definiri potuit quælibet figura: attamen elegantior definitio fuisset è genere & differentia: corpus compræhensum a superficie sphærica.

Quis est maximus circulus sphæræ?

Qui sphæram bisecat. Itaque circulus propior maximo, maior est remotiore & æquidistantes à maximo sunt æquales.

Quæ nam est geodæsia sphæræ?

Planus è diametro & sextante sphærici, est sphæra. Vt antea circulo & sphærico, sic modò cubo & sphæræ sua analogia est. Cubica superficies compræhenditur sex basibus quadratis æqualibus, & sphæra item compræhenditur sex basibus sphæricis æqualibus cubicas bases ambientibus. Cubus efficitur multiplicata sexta parte basis per latus: & sphæra similiter efficitur multiplicata sexta sphærici parte per diametrum tanquam per latus. Sic planus è $\frac{616}{6}$ & 14 diametro est $1437\frac{1}{3}$ soliditas sphæræ. Nam

ræ. Nam planus 616 è maxima peripheria 44. & eius diametro 14 est sphæricum. 5 e.26. Iam diuide 616 per 6-quotus est 102 $\frac{2}{3}$. istum quotum multiplica per 14 diametrum, factus erit 1428: multiplica item $\frac{2}{3}$ per 14, factus erit 28, quæ diuide per 3, quotus erit 9 $\frac{1}{3}$: quæ cum 1428 addita, faciunt 1437 $\frac{1}{3}$.

Quot sunt hic consectaria?

Duo. I. Vt 21 ad 11, sic cubus diametri ad sphæram.

At 21 ad 11 est in ratione 1 $\frac{10}{11}$ superpartiente decem undecimas.

Ergo cubus è 14, hoc est, 2744 ad sphæram 1437 $\frac{1}{3}$ est in minimis terminis eiusdem rationis.

II. Planus è radio & sextante sphærici est hemisphærium. Radium 7 multiplica in 102 $\frac{2}{3}$, factus est 718 $\frac{2}{3}$. Sed accuratius est sumere dimidiū sphæræ. Sic dimidiū 1437 $\frac{1}{3}$ est 718 $\frac{2}{3}$.

Quænam est ratio sphærarum?

Sphæræ habent triplicatam rationem diametrorum. αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. 18. p. 12.

Quot sunt hic consideranda?

Tria. Elenchus, Demonstratio & Vsus.

Quis est Elenchus?

Est speciei pro genere. Nam de corporibus omnibus similibus non solùm sphæricis, sed planis & mistis res omnino uera est, imò de figuris omnibus similibus. 15. e. 4. Sic antea dictum est circulos esse, ut à diametris quadrata, quia essent plana similia, & diametros in circulis esse (ut modò in sphæris) homologa latera. Itaque potuit etiam de circulis dici idem quod de rectilineis similibus. Circuli inter se habent duplicatam rationem diametrorum: ut pateat omnium

omnium figurarum similium commune esse, habere rationem homologorum laterum æquemultiplicatam dimensionibus. Itaque,

Figuræ similes & triplicis dimensionis habent rationem diametrorum triplicatam.

At sphæræ sunt figuræ similes & triplicis dimensionis.

Sphæræ igitur habent rationem diametrorum triplicatam.

Quæ nam est demonstratio?

Cretensis labor inextricabilis hic est. Demonstratio enim polyedrum inscriptum comparat ad sphæram, conclusioque per labyrinthum non maioris, non minoris, atque utriusque partis incommoda procedit.

Quis est vsus huius propositionis?

Quantus eius sit usus, astronomia insigne exemplum suppeditat de differentia solis & terræ. Nam cùm Ptolemæus diametros solis & terræ depræhendisset esse ut 11 ad 2, ex triplicata ratione sphærarum reperit rationem solis ad terram esse 1331 ad 8, id est, solem maiorem terra centies sexagies sexies & $\frac{3}{8}$. Copernicus (quia sol propius ad terram accessit à Ptolemæi tempore milliaria Germanica 9966, id est, Gallica 19952) depræhendit solem maiorem esse terra centies sexagies sexies & $\frac{7}{8}$ ut propè semel amplius superet.

Quæ nam est adscriptio sphæræ?

Quinque corpora plana ordinata (ut tetraedrum, cubus, octaedrum, dodecaedrum, icosaedrum) inscribuntur eidem sphæræ.

Quomodo inscribuntur?

Conuersione semicirculi, habẽtis pro diametro in	*Tetraedro rectam, potentẽ sesquialterum ad latus tetraëdri.*	*Conuersio igitur eiusdem semicirculi sphærã omnibus communem efficit.*
	Quatuor ordinatis reliquis, ordinati ipsius diagonium.	

Quot sunt hic consideranda?

Duo. Latera & Comparatio illorum corporum ordinatorum.

Quomodo deprehenduntur latera illorum corporum?

I. E ratione axis sphærici, latera tetraëdri, cubi, octaëdri, dodecaëdri deprahenduntur. Axis in tribus primis corporibus est rationalis ad latus, ut patuit. Potest enim sesquialterum lateris tetraëdrici, triplum cubici, duplum octaëdrici. Axis enim uel duplici ratione secatur, uel bisecatur. Si axis secetur dupla ratione & perpendicularis à puncto sectionis connectatur, cum punctis axis utrinque, latus maius erit tetraëdri & minus cubi, ut patet per 2. c.4.e.8. & 1.c.15.e.4. & cubici lateris proportionaliter secti maius segmentum est latus dodecaëdri per 15.e.25. Si uerò idem axis bisecetur & perpendicularis erecta connectatut cum alterutro axis puncto: connectens erit latus octaëdri, ut patet item per 2. c.4.e 8.& 1.c.15.e.4.

II. Si recta æqualis axi sphærico, eique à termino perpendicularis conuectatur ad centrum, recta à sectione peripheriæ ad dictum terminum erit latus icosaëdri.

Quæ nam est comparatio corporum ordinatorum?

Ex ordinatis quinque corporibus eidem sphæræ inscriptis, tetraëdrum lateris magnitudine est primum, octaëdrum secundum, cubus tertium, icosaëdrum quartum, dodecaëdrum quintum. 18. p. 13.

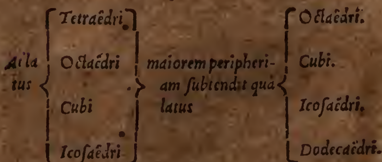
Quæ sunt hic consideranda?

Duo. Demonstratio & Theologia Pythagoræ.

Quæ nam est demonstratio?

In hac propositione est epilogus quidam recollectus e 13. 14. 15. 16. 17. p. 13. Vnde promptum est data circumscriptæ sphæræ diametro inuenire latera inscriptorum corporum. Nam,

Latus quod subtendit maiorem peripheriam est maius.



Latus igitur tetraëdri maius est latere octaëdri & sic deinceps. Postrema comparatio lateris icosaëdri & dodecaëdri operosius ab Euclide demonstratur.

Quæ nam est Theologia Pythagoræ?

In Timæo mundum Deus sic architectatur, ut igni tetraedrum, terræ cubum, aëri octaedrum, aquæ icosaedrum, uniuerso dodecaëdrum tribuat, omnia in eandem & æqualem sphæram concludat. In quo tamen analogiam potius figurarum quam ueritatem & naturam cernas, ut figuræ illæ symbola sint in ele-

In elementis quietis & motus, respondeatque tetraedrum ignis uelocitati, cubus terræ immobilitati, octaedrum aëris liquori, icosaëdrum aquæ fluxui, dodecaedrum cœli capacitati. Alia etiam causa est apud Alcinoum de 12 signis in Zodiaco diuisis in quina triangula: numeroque trecenta sexaginta, quot & Zodiaci sunt gradus. Itaque Aristotel. 8. cap. 3. de cœlo labefactauit genus hoc Geometriæ Physicæ. i. geometricis figuris incongruis elementa physica demonstrantis. Neque uerò Aristoteles Geometricas figuras ad motum uel quietem rerum naturalium ineptas uel incongruas putauit: sed iudicauit corporibus illis tales figuras non cōgruere.

LIBER XXVII. De Cono & Cylindro.

Quid est solidum uarium?

Quod compræhenditur à superficie uaria & basi. Hic enim basis ad superficiem uariam addenda est. Si uaria habent axes diametris basium proportionales, sunt similia. ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἰσιν, ὧν οἵτε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογοι εἰσιν. 24. d. 11. Est consectarium. è 14. e. 4. Nam,

Figuræ quarum anguli sunt æquales & æqualium crura proportionalia: sunt similes.

At solida uaria sunt figuræ quarum anguli sunt æquales & æqualium crura proportionalia. Hic enim axes & diametri sunt tanquam crura æqualium angulorum, nempe rectorum in basi & axi perpendiculari. In cono enim & cylindro anguli sunt potentia, ut in circulo & sphæra, quibus sectione aliqua patefactis & expressis, partes simi-

tes similitudinis in angulis æqualibus & æqualium proportionalibus cruribus manifestæ erunt.

Solida igitur uaria sunt similia.

Quot sunt solida varia?

Duo: Conus & Cylindrus. Causa partitionis è partitione superficierum intelligitur.

Quid est Conus?

Est solidum uarium quod a conico & basi comprehenditur. Hic basis est circulus.

Quae sunt hic consideranda?

Quinque. 1. de fabrica. 2. de differentijs conicae altitudinis. 3. de primatu. 4. de proportione. 5. de similitudine.

I. *Quaenam est fabrica coni?*

Fit conuersione trianguli rectanguli manente altero crure. Vt patet è uarij definitione. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα. 18. d 11. Apollonius conum generaliter tractauit & species recti atque obliqui distinxit, ideoque propter conicam doctrinam altius extructam magnus Geometra dictus est, ut Geminus autor est apud Eutocium. Est autem conus uel rectus uel obliquus. Rectus cuius axis est perpendicularis basi: obliquus seu σκαληνὸς, id est, uarius, cuius axis obliquus & uarius est basi.

2. Quot

II. *Quot sunt differentiæ conicæ altitudinis?*

Tres. Nã conus est,	*Rectangulus*	*si crus manens conuerso est*	*Aequale.*
	Obtusangulus		*Minus.*
	Acutangulus		*Maius.*

Κῶνος ἐστὶν	ὀρθογώνιος	ἐὰν ἡ μένουσα εὐθεῖα τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ ἢ	ἴση.	11.d.18.
	ἀμβλυγώνιος		ἐλάττων	
	ὀξυγώνιος		μείζων.	

Quæ nam est causa triplicis differentiæ?

Altitudinis conicæ differẽtia triplex sumitur è triplici angulorum differentiâ, qua dimidiati coni uertex distinguitur: cuius tamen differentiæ nullus in elementis usus est, quin differentia hæc optica potius quàm geometrica uideatur. Conus enim eminus uidetur instar trianguli. Itaq; pro differentia altitudinis apparet uertice triangulo, obtusangulo, acutangulo: neq; ista differentia coni Geometrica esset, sed optica. Causa uerò triplicis differentię in angulis e differentia crurum est è consectarijs triplicis trianguli de recta bisecante basim, ut patet ad finem 8 libri.

III. *Qui nam est coni primatus?*

Conus est prima figura uariarum. Conus enim & primus est in solidis, ut triangulum in planis rectilineis, ut pyramis in solidis planis: Nam,

Figura quæ in alias simpliciores diuidi non potest, est prima.

At conus est figura quæ in alia solida uaria simpliciora diuidi nequit.

Est ergo prima figura.

IIII. *Quǽnam est comparatio duorum conorum?*

I. Coni æquealti sunt ut bases. Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 11. p. 12. Consectarium est è 12. e. 4. Nam,

Si figuræ primæ sunt æquealtæ, sunt ut bases.
At coni sunt figuræ primæ.
Coni igitur æquealti, sunt ut bases.

II. Coni reciproci basi & altitudine sunt æquales. τῶν ἴσων κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν κώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι ἐκεῖνοι εἰσίν. 15. p. 12. Consectarium est è 13. e. 4. Nam,

Si figuræ primæ sunt reciprocæ basi & altitudinn, sunt æquales.
At coni sunt figuræ primæ.
Coni igitur reciproci basi & altitudine, sunt æquales.

Quid est Cylindrus?

Est solidum uarium, quod à cylindraceo & oppositis basibus compræhenditur. Hic enim circuli duo paralleli sunt bases circuli.

Quot sunt hic consideranda?

Tria: Fabrica, Geodæsia & Ratio ad conum.

I. *Quǽnam est fabrica?*

Fit conuersione parallelogrammi rectanguli manente altero latere. Κύλινδρός ἐστιν ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μένουσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμα εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι τὸ περιληφθὲν σχῆμα. 21. d. 11. Rectus cylindrus est cuius axis est perpendicularis basibus: σκαληνὸς autem cuius axis est obliquus basibus.

II. *Quǽnam est geodæsia cylindri?*

Planus è basi & altitudine est soliditas cylindri.

Exem-

Exempla duo ſunt: Prius de cylindro recto : alterum de obliquo.

Quódnam de recto?

Si cylindri recti baſis ſit 38 $\frac{1}{2}$ ex ea & altitudine 12 ſoliditas cylindri eſt 462. Atq; hæc geodæſia reſpondet priſmatis, omninoq; parallelogrammi triãguli geodæſiæ.

Quódnam de obliquo?

Si cylindru, baſibus oppoſis ſit obliquus : amputa de baſi altera & alteram tanto augeas, habebis menſuram totius.

Quis eſt vſus huius geodæſiæ?

Hinc capacitas uaſis cylindracei æſtimabitur. Inane enim tanquam plenum metiendum eſt. Interioris circuli diameter 6 pedum, peripheria 18 $\frac{6}{7}$. area igitur 28 $\frac{2}{7}$, ex qua & altitudine planus eſt 282 $\frac{6}{7}$. Sic igitur æſtimabis, ut antea, quantum liquoris uel cõtenti cuiuſlibet pes cubicus occupet.

III. *Quæ nam eſt ratio cylindri ad conum?*

Cylindrus eſt triplus coni baſi & altitudine æqualis. Πᾶς κῶνος, κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. 10. p. 12.

Quot ſunt hic conſideranda?

Quatuor: Cauſa, Demonſtratio, Vtilitas, Conſectaria.

Quæ nam eſt eius cauſa?

Eſt è 7. p. 12. & eius conſectario : ſeu ex 5. e. 23. Nam,

Priſma eſt triplum pyramidis eandem & baſim & altitudinem habentis.

At cylindrus refert priſma & eius ſpeciem imitatur, ut conus pyramidem : quin intra eadẽ latera priſma, cylindruſq; pyramis & conus eſſe poſſunt : & ſi priſma pyramiſq; baſis ad modum multangulæ fuerint, eadem figura

prisma & cylindrus, pyramis & conus uideantur: deniq; intra eadem latera ut coni cylindrique, sic prisma & pyramides ex axibus & diametris basium similitudinem habeant.

Cylindrus igitur est triplus coni.

Quæ nam est demonstratio Euclidis?

Huc idem Labyrinthus redit qui fuit in 2. & 5 p. 12.

Quánam est eius vtilitas?

Solidæ utilitatis est ut 7.p.12. ad dimensionẽ conorum è cylindris.

Quot sunc hinc consectaria?

Tria: I.Est de geodæsia coni. Planus è cylindri basi & triente altitudinis est soliditas coni basi & altitudine æqualis.

Vnde est geodæsia illa?

E' triplicitate cylindri: ut antea geodæsia pyramidis fuit è triplicate prismatis.

Quomodo habetur altitudo?

Si quadratũ è radio basis tollatur à quadrato de latere, latus reliqui erit altitudo, ut patet per 5. e. 12. Igitur è radio 5 quadratum 25 tollatur è quadrato 169 de latere 13, reliqui 144 latus erit 12 pro altitudine.

Quánam est tota soliditas?

Ex altitudinis tertia 4 & basi circulari $78\frac{4}{7}$ planus est $314\frac{2}{7}$ pro coni soliditate. Atq; hæc de geodęsia coni. Reliqua consectaria duo, sunt de comparatione duorum cylindrorum.

I. Cylindri æquealti sunt ut bases. Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κύλινδροι, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 11. p: 12. Est speciale consectarium ad illam inclytam matrem, 12. e. 4.

Primæ figuræ æquealtæ, sunt ut bases.

At cy-

At cylindri ſunt æquemultiplices primarum, ut conorum.

Cylindri igitur æquealti, ſunt ut baſes.

Quænam eſt demonſtratio Euclidis?

Huc idem Labyrinthus redit è 2.5.10.p.12.

Quis eſt eius uſus?

Cylindracea forma ſacci ſunt, quibus ferè frumentum portatur. Si quis igitur agricola ſaccum frumenti uicino commodauit, in cuius baſi diameter ſit 4 pedum, tādemq; uicinus pro uno ſacco reddat quatuor æquealtos & in baſi pedalis diametri: uidebitur fortaſſe commodatum reddidiſſe æquali menſura, altitudine uidelicet & baſi. At magnam differentiam quadrata è quatuor ſingularibus diametris 1, 1, 1, 1, id eſt 4 ad quadratum 16 è 4 commodati diametro. Circuli nempe ſunt ut à diametris quadrata, per 2.e.15. Itaq; fraus eſſet 12, id eſt tripli. Nam quatuor ſingulares diametri faciunt 4: diameter commodati 4 facit 16 quadratum: ſubductis igitur 4 à 16 manent 12.

II. Reciproci baſi atq; altudine ſunt æquales. τῶν ἴσων κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. 15.p.12. Eſt conſectarium è 13.e.4.

Figuræ primæ reciprocæ baſi & altitudine, ſunt æquales.

At cylindri ſunt primarum æquemultiplices.

Cylindri igitur reciproci ſunt æquales.

Itaq;, Si cylindrus ſecatur plano baſibus oppoſitis parallelo, ſegmenta ſunt ut axes. Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. 13.p.12. Axes enim ſunt altitudines. Conſectarium item eſt è generali theoremate primarū figurarū, ſed paulò ſecus propoſitū de altitudine, tanq̄ generale fuiſſet, Aequalis baſis primas figuras, eſſe ut altitu-

 dines.

dines. Respondet autem 4. c. 5. c. 23.

Qui superest?

Inæquales sectiones sphæræ huc reiectę sunt, quia comprædicuntur à superficie tum sphærica tum conica, ut sector: item à plano & sphęrica ut sectio, & in utroque sicut in circulo segmentum ipsum maius minusq; dicitur, & sector in centro ut antea consideratur.

Quid est sector sphæræ?

Est segmentum sphæræ, quod foris à sphærico, intus à conico in centrum terminato comprædenditur, maior concauo, minor connexo .. Hic analogia quædam est cum sectore circulari.

Quæ'nam est sectorum geodæsia?

Planus è diametro & sextante maioris uel minoris sphærici est sector maior uel minor. Sic è diametro 14 & 4 $\frac{2}{3}$ (quæ est una sexta sphærici maioris.) planus est 1026 $\frac{2}{3}$ pro soliditate maioris sectoris. Sic ex eadē diametro 14 & 29 $\frac{1}{3}$ (quæ est $\frac{1}{5}$ de 176, minore sphærico) planus est 410 $\frac{2}{3}$ pro soliditate minoris sectoris.

Quæ'nam est soliditas sectionis?

Ex additione & subductione. Nam si maior sector augeatur intermedio cono, totus erit maior sectio: si minor minuatur, reliquus erit minor sectio. Sic conus intermedius dimensus 126 $\frac{4}{63}$ additus sectori maiori componit 2152 $\frac{46}{63}$: ac idem detractus minori sectori relinquit 284 $\frac{38}{63}$.

ΤΕ'ΛΟΣ.

Τῷ θεῷ δόξα εἰς αἰῶνα.

L A

LAZARUS SCHONEa-
rus Freigio, S. P.


CVM ex editis abs te libris, Freigi Clarissime, satis cognouissem, quid in Philosophia tibi placeret, quemq; praecipuè hoc tempore iuuentuti ad discendum autorem proponendum iudicares, quod scholae rector esses eo in loco, vbi homines maxima de re malè sentientes plurimum possent, testes sunt amici mei, quàm saepè optauerim tibi res secundiores, quã aliquoties mihi simile quiddam conãti fuere. Id nõ frustra fuisse nuper cognoui ex oratione de tuo Rectoratu, cuius initio tale quiddam significatur. Quem tamen rectoratum non magis tibi ipsi, quam Norinbergensi reipublicae viciniisq; populis, qui scholis miserabiliter priuantur, ex animo gratulor. Noli verò existimare, quod de te sollicitus fuerim, id ex occulto potius rerum futurarum sensu, qui humanis animis tribuitur, quàm è recordatione mearum perturbationũ nonnulloque rerum scholasticarum vsu profectum esse. Idq; vt planius intelligas ita esse, pauca quaedam è scholasticarum administrationum mearum curriculo tibi, qui cum saepissimè colloqui & communicare optaui, existimanda his literis exponam. Per annos nouem fermè tribus in scholis, Schmalkaldẽsi, Hersfeldensi & Marpurgensi, quoties iudicio meo frui licitum fuit, in erudienda iuuentute P. Ramum abiectis alijs autoribus secutus sum publicè quidem in Grammatica, Rhetorica, Logica, domi autem in Arithmetica quoq; & Geometria. Tametsi verò singularis iuuentutis alacritas inde profectusque palàm fuerit, tamen nusquam homines perditi & amentes

 abfue-

abfuerunt, Hochstratus videlicet & Sorbona, qui vociferarentur nouitatem istam iuuentuti calamitosam fore. Et cum vtilitatem ante oculos positam cernere non possent, vaticinando persæpè apud simplices homines hoc perfecerunt, vt meum institutum retardarent. Graues autem cum primis aduersarij, homines Philippici, qui domini præceptoris Melanchthonis se discipulos dicerent, esse voluerunt. His ego primum, quòd recens ad hoc certamen venirem, dixi, Philippum Melanchthonem non ea conditione scripsisse, vt postea melioris doctrinæ spes nulla esse cuiquam debuerit aut potuerit, eius sententiæ testem ipsum adduxi, qui Grammaticam in præfatione sua meliorem optaret, qui Dialecticam & Rhetoricam casu magis & quodam iuuenili studio, quam re satis cognita sibi natam esse apertis verbis de se profiteretur. Verùm his armis tectus esse non potui. Nomen autoris sui præ omnibus argumentis hominibus placuerat. Cumq; concionator quidam ad populum dixisset, ambulate in luce, quoniam tenebræ iam scholis nascuntur è Grammatica Rami, quicunq; sit iste diabolus, quam rem violenta interdicta sequebantur, paulò pòst cum Scholæ Schmalcaldensis Rectoratu propositum meum terminaui. Res tamen ex hominum commemoratione longè aliter habere se visa est, quam Hochstrati putarant, multorumque nobilium studijs effectum, vt Hersfeldiam accerserer ad docendam Rhetoricam. Quo in loco cum aduersarijs meis nihil, nisi me presentem errores conuicissent, crederetur, facti sunt isti tam molles & pacati, vt ad disputationem seculum totum sumpsisse viderentur, hoc est, nunquam venturi. Quare Talæi Rhetoricam meo iudicio sic docui, vt Germanicam facerem, neq; mihi posset vllum Sorbonicum aut Cacophilippicum murmur obsistere. Hinc porrò cum Marpurgensis Pędagogiarcha

cha Iustus Vulteius mortuus esset, Landgrauiorum iudicio, vt ei succederem, optatus sum. Cumq; antequam hunc locum adirem, professus essem, me de P. Ramo quicquid probarem sumpturum, idq; consensu principum, certamen paratum fuit cum artium facultate pedagogei in spectrice & sexto quoq; mēse examinatrice. Neque hic tamen tota facultas, sed paucorum hominum difficultas mihi aduersata est, qui clamabant, tu non es doctior domino præceptore. Quibus cum responderem: neque dominum præceptorem doctiorem esse Dialectica, quæ ars esset omnis humanæ inuētionis iudicijq; rectrix peteremq;, ut si parere domino præceptori potius, quam indicta causa damnare quēquam didicissent, id in hac controuersia demonstrarent: cumq; iuberet Philippus Melanchthon omnem humanam doctrinā ad tres normas certitudinis siue κριτήρια tria hæc, experientiam, principia, syllogismum expendi, dubioq; procul suos discipulos iuberet, optarem, ut de me his legibus iudicium fieret: repressa est hominum feritas paulisper, quod tantum me boni in ista despecta logicuncula animaduertisse non putarat, deq; nouis artibus nouaq; nocendi via cogitādum sibi iudicauit. Iamq; septem mensem Dialecticam & Rhetoricam docueram, cum isti de examinando soliciti examinis discrimen magis quam puer quisquam permetuentes, sese cum Theologis coniunxerunt, qui quod dixissent, P. Rami Dialecticam religioni periculosam esse, cum sine Theologicis exemplis poëticis tantum & oratorijs esset referta, videbantur diuinitus loquuti. Respondi, me id quod antea optassem iudicium subiturum, cumq; Theologicæ huius factionis princeps paulò loquacior in Philosophica quæstione videretur, eum ad disputationis congressum vocaui. Tumq; quidam verum confessus est dolorem, dixitq;, si tu Rami præcepta doce

 bis

bis, quomodo nos examinabimus? Neq; verò adhuc quisquam repertus est, qui vllum errorem conuincere ret. Fuit tamen necessitate quadam premente hic quoque remittendum aliquid de nostro proposito, effectumq; cum sincera veræ atq; vtilis doctrinæ studia vix animaduerti possent, vt tandem huic quoq; administrationi tam solicitæ & ancipiti finem imponerem, quod vix tandem proximo mense Ianuario licuit. Habes igitur clarissime Freigi partem aliquam meorum laborum, de quibus posse te iudicare non dubito. Ego certè quoties meorum aduersariorum vitam, cum Philippi Melanchthonis vita studijsque comparaui, toties maximam dissimilitudinem, & propè dicam repugnantiam horum hominum cum tanto viro perspexi. Ille Latinitatem Ciceronis vnicè suis suadebat. Hi (extorta enim est eius nuper contra me Epistola) obscurorum virorum balbutiem penè referunt. Ille declamando, disputando, poëtis & oratoribus Græcis & Latinis enarrandis plurimum temporis consumebat, hi nihil tale: Ille in Epistolis, vbi de seipso scribit, Rhetoricam & Dialecticam sibi casu potius quam re satis cognita natam apertis verbis testatur, hi nihil perfectius nihil absolutius optari posse vociferantur. Ille Mathematicas artes omnes excolebat, Euclidem, Archimedem, Ptolemæum aut ipse legebat aut legi publicè curabat, hi homines adeò sunt ἀγεωμέτρητοι, ut auditis istorum autorum nominibus peregrinos pisces nominari putent. Multas præterea Physicæ partes Melanchthon libro primo commemorauit, quas à suis excoli vellet, nihil tamen in plerisque post mortem eius est elaboratum. Omitto Theologiæ rationem, omitto mores qui multo minus doctrinæ respondent, quàm etiam præceptori. Ego autem quintum iam mensem ociosus in patria dego incertumque an vnquā ad scholam sim rediturus: artibus Mathematicis

me oblecto in quibus discipulum habeo fratrem, nec mihi desunt amici ad forensem disciplinam hortatores, à qua non admodum sum alienus, quanquam pleraque videantur in vestibulo mirabilia. Nunc postquam de me forsan plus quam satis verborum feci, de te quoque ex teipso cognoscere cupio. Quare si mihi hac in re gratificatus fueris, quod ut facias, etiam atque etiam rogo, magno me beneficio tuo affectum putabo. Vale VII Iunij Anno CIↃ. IↃ. LXXVII. Neapoli ad Salam Francorum.

PETRVS RAMVS.



Mnes artes, quæ cognitionem honestam & liberalem scientiam continent, allicere ad se percipiendum animos nostros debent: sed Mathematicæ inprimis disciplinæ, in quibus si vel immensam materiam, vel summum constructionis artificium consideres: sic operis elegantia cum materiæ vastitate certare videbitur, vt cum ingens rerum moles admirabilis tibi visa sit, te tamen cōpositionis splendor multo vehementius oblectet ac retineat attentius. Etenim quid est in omni natura tam varium tamq; multiplex, quàm numerorum varietas atq; multitudo? Quid tàm magnum atq; amplum, vel oculis cerni, vel animo cogitari potest, quàm terrarum, aquarum, aëris, cœlorū, mūdiq; vniuersi magnitudo, atq; amplitudo? Atqui hæc materies tam varia, tam multiplex, tam magna, tam ampla mathematicæ scientiæ propria est. Quā tamen incredibilis rerum ordo, dispositioq;, vt adhuc hominum opinio fuit, omni laude longè superat, ac

rat, ac vincit. Hic enim prima medijs, media postremis, omniaq; inter se, velut aurea quadam Homeri catena sic vincta, colligataque sunt: vt nil aptius, nil compactius, nil firmius fingi posse videatur, positis principijs, tanquam solidis fundamentis consequentium demonstrationes affirmantur. Quamobrem minimè mirandum est Pythagoram, Platonemque huius admiratione disciplinæ captos, maius in ea diuiniusq; quiddam depræhēdisse, quam vt humanis sensibus tribuendum arbitrarentur. Itaq; in anima tam excellentes notitias ab intelligentiæ primæ ingenitis & æternis exemptis insitas, & ingeneratas crediderunt. Eiq; propterea nomen ipsum μαθήσεως quasi reminiscentiæ, recordationisq; (ut Proclus autor est) affinxerunt: quasi tanta scientia non ab homine inuenta, sed diuinitus in animis nostris impressa, recordatione animaduersarum rerum paulatim recrearetur. Verumenimuerò quàm longa obliuio, quàm tarda recordatio ista fuit? Primi illi homines (vt Iosephus antiquitatis Iudaicæ scriptor ait) Adamus, Sethus, Enus, Noëus vitę & longissimæ & contemplationi deditissimæ beneficio, in hanc recordationem incubuerunt: & ne alia nouæ obliuionis caligine circumfusa teneretur, duabus ingentibus columnis exaratam descriptamq; ad posteritatē transmiserunt. Hinc Aegyptij, Græci, Itali, Siculi, Arabes, Hispani, Germani, Galli, omniumq; terrarum populi acceptam excoluerunt, atq; amplificarunt. Hinc tot, tamq; excellentia ingenia excitari, Thaletis, Pythagoræ, Hippocratis, Platonis, Eudoxi, Ptolemæi, Euclidis, Archimedis, aliorumq; innumerabilium cæperunt: videlicet ad huius Mathematicę recordationis opus exedificandum, tot fabros, tot architectos, adhiberi oportuit, quia non modo non homo vnus, aut ætas vna: sed vix multa & hominum, & ætatum millia ad constituendam tam nobilis, tamque præstantis

ſtantis doctrinæ ſcientiam ſufficerent. Quamobrem vt publica ſtudia, ad hanc cognitionem amplexandam, non ſolum induſtria, quod aſſiduè facimus, ſed etiam facultate librorũ, & copia iuuaremus: curauimus excudendas matheſes antiquorum ab Euclide collectas, ſemotis interpretum & commentis & figuris: non quod interpretes improbemus: ſed vt neminem ſumptus (qui in hos libros antea maior erat, quam tenues diſcentium fortunæ ferre poſſent) impoſterum à diſcendo deterreat. Si quid autem obſcurum fuerit, longè commodius viua præceptoris intelligentis oratio, quàm picta in libris interpretũ manus explicabit: quodq; ad figuras attinet, magis laudabo diſcipulum in abaco & puluere figuras ſibi demonſtratas imitantem, quàm otiosè & inutiliter alienas picturas aſpectantem.

FINIS.



BASILEÆ,
PER SEBASTIANVM
HENRICPETRI, ANNO SA.
lutis CIↃ. IↃ. LXXXIII.
Menſe Martio.